Bölüm 3

SIFIR TOPLAMLI OLMAYAN OYUNLAR

Sıfır toplamlı olmayan iki oyunculu (2-$m \times n$-STOO) oyunlarda, oyunculardan birinin kazancı digerinin kaybı olmayan oyunlardır.

Yani $A = [a_{ij}]$ oyun matrisinde $a_{ij} + b_{ij} = 0$ olması gerekmez.

En azından A oyun matrisinin bir bileşeninde bunun sağlanmaması gerekir.

2-m×n-STOO nun açılımı şöyledir.

2....................... oyuncu sayısı

m×n .... stratejiler sayısı

STOO .... Sıfır toplamlı olmayan oyun

Mesela aşağıda matrisi verilen oyun 2-2×2-STOO oyunudur.

$A\backslash B$	B_1	B_2
A_1	$(3, 6)$	$(4, 7)$
A_2	$(-2, 2)$	$(0, 1)$

3.0.1 2-m×n-STOO nun çözümü

Çözüm 2-2×2-STOO üstünden anlatılacaktır. Bunun tek gerekçesi anlatım kolaylığıdır. Çözüm yöntemi her m×n için geçerlidir ve 2×2 nin dışında da örnekler verilecektir.

2-2 × 2-STOO nun matrisi şöyle yazılsın.

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	$(a_{11}, \mathbf{b}_{11})$	$(a_{12}, \mathbf{b}_{12})$
A_2	$(a_{21}, \mathbf{b}_{21})$	$(a_{22}, \mathbf{b}_{22})$

Bu matristen A ve B ye göre iki matris yazılır.

Bu matrisler şunlardır.

A (A ya göre)	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

ve

B (B ye göre)	B_1	B_2
A_1	b_{11}	b_{12}
A_2	b_{21}	b_{22}

Her iki matriste de minimumlar üstünden hareketle her oyuncunun garanti kazancını veren strateji belirlenir. Bu iki stratejinin kesiştiği hücre değeri iki oyuncunun en iyi kazancıdır.

Örnek 3.0.2 *2-2×2-STOO nun matrisi şöyle olsun.*

$A \backslash B$	B_1	B_2	*A nın satırlardaki garanti kazancı*
A_1	$(2, \mathbf{3})$	$(3, \mathbf{5})$	2
A_2	$(2, \mathbf{2})$	$(1, \mathbf{3})$	1
B nin garanti kazancı	2	**3**	

Bu oyunda A için en iyi strateji A_1 ve B için en iyi strateji B_2 dir.

A ve B için kararlaştırılan stratejilerin kesiştiği hücre değeri $(3, \mathbf{5})$ dir ve A, 3 kazanır ve B, 5 kazanır.

Örnek 3.0.3 *Bir 2-3×3-STOO matrisi aşağıdaki gibi olsun. Oyunun çözümünü ve oyuncuların kazancını hesaplayalım.*

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	*A nın satırlardaki garanti kazancı*	
A_1	$(2, 5)$	$(3, 4)$	$(5, 6)$	2	
A_2	$(6, 2)$	$(4, 5)$	$(6, 7)$	**4**	**4**
A_3	$(0, 1)$	$(3, 6)$	$(8, 5)$	0	
B nin garanti kazancı	1	4	**5**		
			5		

Bu durumda A için strateji A_2 ve B için strateji B_3tür ve A, 6 ve B, 7 kazanır.

Örnek 3.0.4 *Bir 2-3×4-STOO matrisi aşağıdaki gibi olsun. Oyunun çözü-*

münü ve oyuncuların kazancını bulunuz.

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	*A nın satırlardaki garanti kazancı*	
A_1	$(5,7)$	$(8,9)$	$(0,2)$	$(6,4)$	0	
A_2	$(7,2)$	$(3,0)$	$(3,-1)$	$(3,3)$	3	**3**
A_3	$(3,4)$	$(5,5)$	$(1,1)$	$(6,-4)$	1	
B nin garanti kazancı	2	0	-1	-4		
	2					

Bu oyunda A için strateji A_2 ve B için strateji B_1 dir ve A.7 ve B.2 kazanır.

Örnek 3.0.5 *Bir fabrika yönetimi ve işçi sendikası arasında görüşmeler yapılmaktadır. Sendikanın talepleri şöyledir..*

(Z) Saat başı 2 TL zam

(E) Emekli ikramiyelerinin iyileştirilmesi,

(S) Periyodik sağlık kontrollerinin yapılması

Fabrikanın talepleri şunlardır.

(H) Hafta sonu yarım gün ek çalışma yapılması,

(Ü) Üretim hattında otomasyona geçilmesi.

Anlaşma sağlanamaz ve hakem heyetine gidilir. Hakem heyetinin çözümü aşağıdadır.

Hakem heyeti her iki taraftan isteklere kendi açılarından nümerik değer vermelerini ister. Sendikanın değerlendirmesi:

Z	E	S	MD	H	Ü	E+S	Z+E+S
3	4	3	0	-1	-2	7	10

Fabrikanın değerlendirmesi:

Z	E	S	MD	H	Ü	H+Ü
-2	-2	-1	0	2	3	5

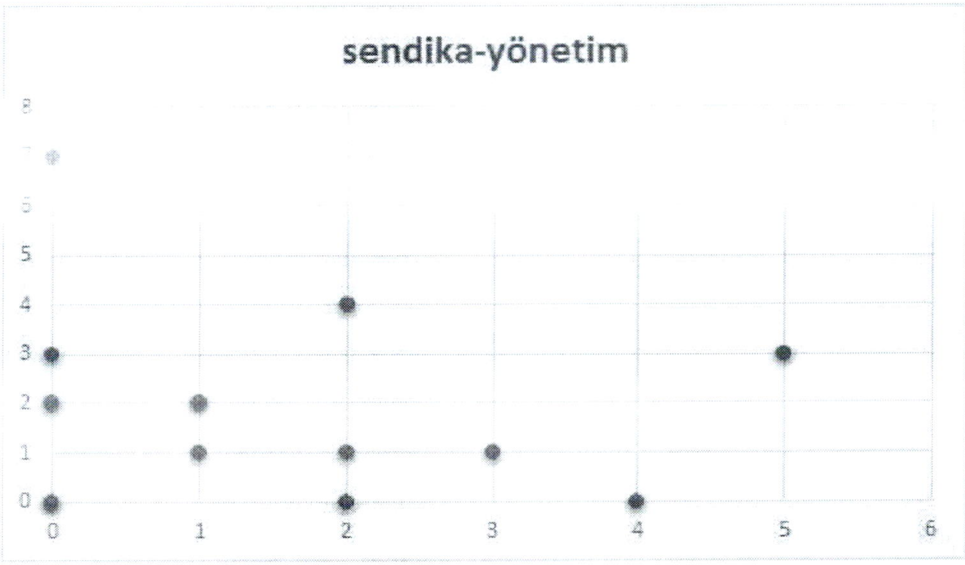
Bu değerlendirmelere bağlı olarak değerlendirme oyun matrisi aşağıdaki gibi hesaplanır.

			S				
		Z	E	S	MD	ES	ZES
	H	$(0,2)$	$(0,3)$	$(1,2)$	$(0,0)$	$(-3,7)$	$(-5,10)$
F	Ü	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(0,0)$	$(-3,7)$	$(-5,10)$
	HÜ	$(2,0)$	$(3,1)$	$(4,0)$	$(5,3)$	$(2,4)$	$(0,7)$
	MD	$(-2,3)$	$(-3,7)$	$(-1,3)$	$(0,0)$	$(-3,7)$	$(-5,10)$

Tablo üstünden degerlendirelim. Her iki tarafta kaybetmek istememektedir. Bu durumda tabloda negatif değer içeren hücreler dikkate alınmadan tablo yenilenir.

			S				
		Z	E	S	MD	ES	ZES
	H	$(0,2)$	$(0,3)$	$(1,2)$	$(0,0)$		
F	Ü	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(0,0)$		
	HÜ	$(2,0)$	$(3,1)$	$(4,0)$	$(5,3)$	$(2,4)$	$(0,7)$
	MD				$(0,0)$		

Oyunun çözümü $(2,4)$ tür. Grafik aşağıdadır.



Şekil 3.1:

3.1 Oyunların Grafik Yöntemle Çözümü

3.1.1 2×2 Oyunların Çözümü için Analitik Yöntem

Grafik yöntemle çözüm öncelikle 2×2 oyunlar üstünden anlatılacaktır. Bunun tek sebebi anlaşılabilir olmayı kolaylaştırmaktır.

Denge noktası olmayan bir 2×2 oyunun matrisi form olarak aşağıdaki gibi olsun.

$A\backslash B$	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Oyunun denge noktası olmadığı için karma stratejileri kullanmak zorunluluğu vardır.

A nın A_1 ve A_2 stratejileri için karma stratejileri olasılıkları p_1 ve p_2 olsun.

$$p_1 + p_2 = 1$$

dir ve

$$p_1 = 1 - p_2$$

veya

$$p_2 = 1 - p_1$$

seçimleri kullanılabilir.

Oyun değeri v olmak üzere, eğer A, p_1 ve p_2 olasılıkla A_1 ve A_2 kullandığında B, B_1 stratejisini kullanırsa A nın kazancı

$$a_{11}.p_1 + a_{21}.p_2 = v$$

ve A, p_1 ve p_2 olasılıkla A_1 ve A_2 kullandığında B, B_2 stratejisini kullanırsa A nın kazancı

$$a_{12}.p_1 + a_{22}.p_2 = v$$

olur. Böylece elde edilmiş olan

$$\begin{aligned} a_{11}.p_1 + a_{21}.p_2 &= v \\ a_{12}.p_1 + a_{22}.p_2 &= v \\ p_1 + p_2 &= 1 \end{aligned}$$

denklem sisteminden p_1 ve p_2 hesaplanır. Hesaplanan olasılık değerleri denklemlerden birinde yerine yazılarak A için oyun değeri bulunur.

Şimdi cebirsel olarak elde edilen çözümün analitik formunu irdeleyelim. Öncelikle

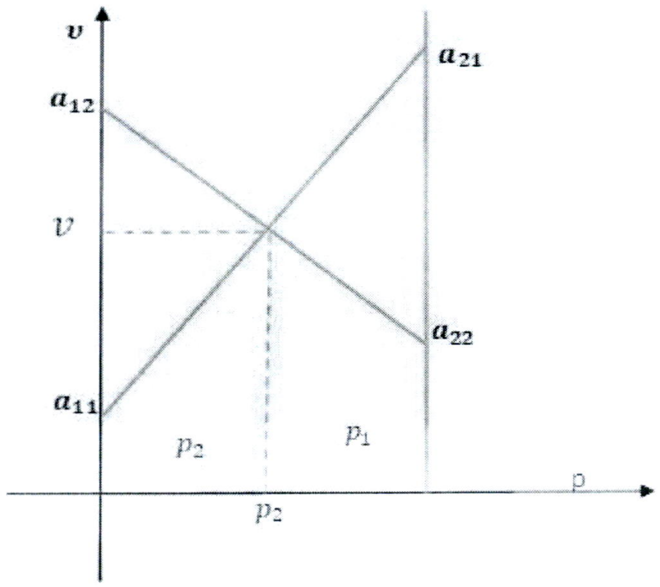
$$p_1 = 1 - p_2$$

seçelim. ($p_2 = 1 - p_1$ seçimi de yapılabilir).

Bu durumda ilk iki denklem,

$$\begin{aligned} a_{11}.(1-p_2)+a_{21}.p_2 &= v \\ a_{12}.(1-p_2)+a_{22}.p_2 &= v \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bunlar p_2 nin bağımsız değişken olduğu doğru denklemleridirler. Temsili bir grafik şöyle çizilsin.



Şekil 3.2: Eksen üstünde matris bileşenlerinin pozisyonu

Eksen üstündeki değerlerin nasıl hesaplandığını verelim.

D_1 doğrusu için

$$a_{11}.(1 - p_2) + a_{21}.p_2 = v$$

$$p_2 = 0 \text{ ise } v = a_{11} \qquad (0, a_{11})$$

$$p_2 = 1 \text{ ise } v = a_{21} \qquad (1, a_{21})$$

D_2 doğrusu için,

$$a_{12}.(1 - p_2) + a_{22}.p_2 = v$$

$$p_2 = 0 \text{ ise } v = a_{12} \qquad (0, a_{12})$$

$$p_2 = 1 \text{ ise } v = a_{22} \qquad (1, a_{22})$$

yazılabilir.

Bu iki doğrunun arakesit noktası

$$D1 \cap D2 = (p_2, v)$$

olarak bulunur. p_2 dolayısıyla p_1 oyuncunun stratejileri hangi oranda oynayacağını gösterir ve v oyuncunun kazanç değeridir.

İlk örnek olarak Y-T :Yazı-Tura oyununun çözümünü analitik yoldan yapalım.

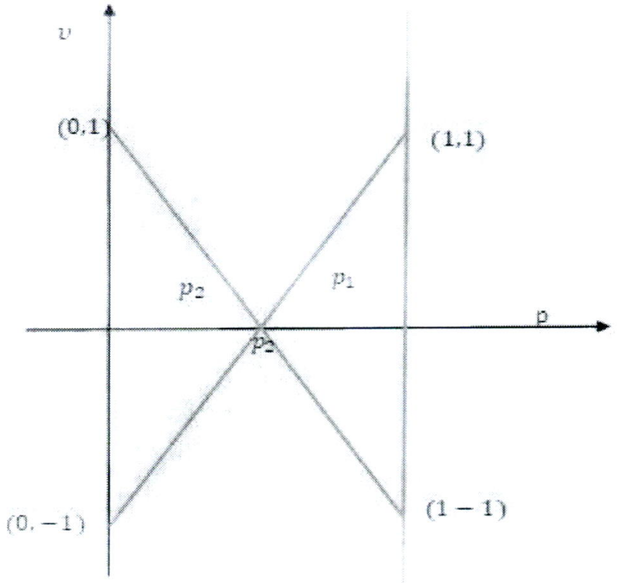
Örnek 3.1.1 *Y-T oyunun matrisi hatırlanacağı gibi*

$A \backslash B$	$Y = B_1$	$T = B_2$
$Y = A_1$	1	-1
$T = A_2$	-1	1

şeklindeydi. İlgili denklemler yazılırsa;

$$\begin{aligned} p_1 . p_2 &= v \\ -p_1 + p_2 &= v \\ p_1 + p_2 &= 1 \end{aligned}$$

İlgili doğruların denklemlerini ve grafiklerini oluşturalım. a_{ij} değerlerini eksen üzerinde göstererek grafiğini çizelim.



Şekil 3.3:

Verilen iki noktadan geçen doğru denkleminin yazılışı yöntemiyle devam edilirse,

(0, 1) ve (1, −1) noktalarından geçen doğru denklemi

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{-1-1}$$
$$\Longrightarrow \quad x = \frac{y-1}{-2}$$
$$\Longrightarrow \quad y-1 = -2x$$

$$y = -2x+1$$

elde edilir. Benzer işlemlerin tekrarı ile

(0, 1) ve (1, 1) noktalarından geçen doğru denklemi