Bölüm 1

DUAL BİRİM KÜRE VE STUDY DÖNÜŞÜMÜ

1.1 Dual Birim Küre ve Study Dönüşümü

[1]

$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesini göstermek üzere,

$$*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad (a,b)*(c,d)=(ac,ad+bc)$$

olarak tanımlanan işleme dual çarpım adı verilir (K).

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R},*)$ ikilisi kısaca $\mathfrak{D}$ ile gösterilir ve dual sayılar cümlesi olarak isimlendirilir. Bir $d=(a,b)$ dual sayısı,

$$\begin{aligned} d &= (a,b)=(a,0)+(0,b) \\ &= a(1,0)+b(0,1) \end{aligned}$$

[1] Eduart Study bir öğretmenin oğludur. 23 Mart 1862'de Couburg/Almanya da doğdu ve 6 Nisan 1930'da Born/ Almanya'da öldü. 1880'den itibaren Jena, Strasbourg, Leipzig ve Munich Üniversitesi'nde çalıştı. Doktorasını 1884'de Münich Üniversitesi'nde aldı. Study kompleks sayıların geometrisinde bir liderdir. Study enumerative geometrinin temel prensiplerini yeniden formülize etti. 1923'te reel ve kompleks cebirdeki önemli çalışmasını yayınladı. Study eliptik uzaydaki doğrular üzerine de çalıştı. 1903'de *Geometrie der Dynamen* yayınladı. Bu eseri, Öklidiyen kinematik ve katı cisimlerin mekaniği ağırlıklıdır. Study hakkında ilginç bir not: Öğrencilik günlerinden itibaren biyolojiyle çok ilgiliydi ve önemli bir kelebek koleksiyonuna sahipti.

olarak yazılırsa, $(1,0)$ dual sayısına d nin reel birimi, $(0,1)$ dual sayısına da dual birim denir. $(0,1)$ sayısı ϵ ile gösterilir ve

$$\epsilon * \epsilon = \epsilon^2 = (0,0) = 0$$

dır. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} \epsilon * \epsilon &= (0,1) * (0,1) \\ &= (0.0, 0.1 + 1.0) \\ &= (0,0). \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\{(a,0) \mid (a,0) \in \mathfrak{D}\} \leftrightarrow \mathbb{R}$$

birebir tekabülünden hareketle,

$$\epsilon^2 = 0$$

dır. $\mathfrak{D}$ üzerinde toplama işlemi,

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$

şeklinde tanımlanır. $(\mathfrak{D}, \oplus, *)$ üçlü sistemi birimli ve değişimli halkadır.

$$d = (a,b) = a + \epsilon b$$

dual sayısının eşleniği

$$\overline{d} = a - \epsilon b$$

olarak tanımlanır.[2]

$$\mathfrak{D}^3 = \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$$

cümlesi üzerinde toplama ve skaler ile çarpma,
$A = (A_1, A_2, A_3) = (a_1 + \epsilon a_1^*, a_2 + \epsilon a_2^*, a_3 + \epsilon a_3^*)$

$$\begin{aligned} A + B &= (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3) \\ \lambda A &= (\lambda A_1, \lambda A_2, \lambda A_3) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. $(\mathfrak{D}^3, +)$ bir abel grubudur. $(\mathfrak{D}^3, +)$, $\mathfrak{D}$ üzerinde bir modüldür.

[2] $d = (a,b) = a + \epsilon b$ dual sayısı, genel olarak $d = a + \epsilon a^*$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.1 *$\mathfrak{D}^3$ modülünün her elemanına dual vektör denir.*

$\mathfrak{D}^3$ ün bir $A = (A_1, A_2, A_3)$ elemanı,

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + \epsilon a_1^*, a_2 + \epsilon a_2^*, a_3 + \epsilon a_3^*) \\ &= (a_1, a_2, a_3) + \epsilon(a_1^*, a_2^*, a_3^*) \\ &= \overrightarrow{a} + \epsilon\overrightarrow{a^*}, \quad \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir.

$\mathfrak{D}^3$ üzerinde bir çarpım:

$A, B \in \mathfrak{D}^3$ için,

$$\begin{aligned} \langle A, B\rangle &= \left\langle \overrightarrow{a} + \epsilon\overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b} + \epsilon\overrightarrow{b^*} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \epsilon(\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b} \right\rangle) \\ &= \overrightarrow{c} + \epsilon\overrightarrow{c^*} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bir işlemdir ve iç-çarpım özelliklerini sağlar (okuyucu kolayca gösterebilir ve göstermelidir). Bir $A \in \mathfrak{D}^3$ dual vektörünün normu, $A = \overrightarrow{a} + \epsilon\overrightarrow{a^*}$ için

$$\|A\| = (\|\overrightarrow{a}\|, \frac{\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\|\overrightarrow{a}\|})$$

dual sayısıdır.[3]

$\|A\| = (1, 0) = 1$ ise A ya birim dual vektör denir. Bu durumda $\|\overrightarrow{a}\| = 1$ ve $\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle = 0$ dır.

Bu hazırlıktan sonra asıl konuya, E. Study dönüşümüne geçebiliriz.

---

[3] $d = \overrightarrow{a} + \epsilon\overrightarrow{a^*} \in D$ için $\sqrt{d}$ yi hesaplayalım.
$\sqrt{\overrightarrow{a} + \epsilon\overrightarrow{a^*}} = \overrightarrow{c} + \epsilon\overrightarrow{c^*}$
$\Rightarrow \overrightarrow{a} + \epsilon\overrightarrow{a^*} = (\overrightarrow{c} + \epsilon\overrightarrow{c^*})^2 = \overrightarrow{c}^2 + \epsilon(2\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{c^*})$
$\Rightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}^2, \overrightarrow{a^*} = 2\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{c^*}$
$\Rightarrow \overrightarrow{c} = \sqrt{\overrightarrow{a}}$
$\Rightarrow \overrightarrow{c^*} = \frac{\overrightarrow{a^*}}{2\sqrt{\overrightarrow{a}}}$ yani $\sqrt{\overrightarrow{a} + \epsilon\overrightarrow{a^*}} = \sqrt{\overrightarrow{a}} + \epsilon\frac{\overrightarrow{a^*}}{2\sqrt{\overrightarrow{a}}}$ dır. Buna göre;
$A = \overrightarrow{a} + \epsilon\overrightarrow{a^*}$ için

$$\begin{aligned} \|A\| &= \langle A, A\rangle^{\frac{1}{2}} = (\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle + \epsilon 2\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|\overrightarrow{a}\|^2 + \epsilon 2\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|\overrightarrow{a}\| + \epsilon\frac{\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\|\overrightarrow{a}\|}) \end{aligned}$$

elde edilir.

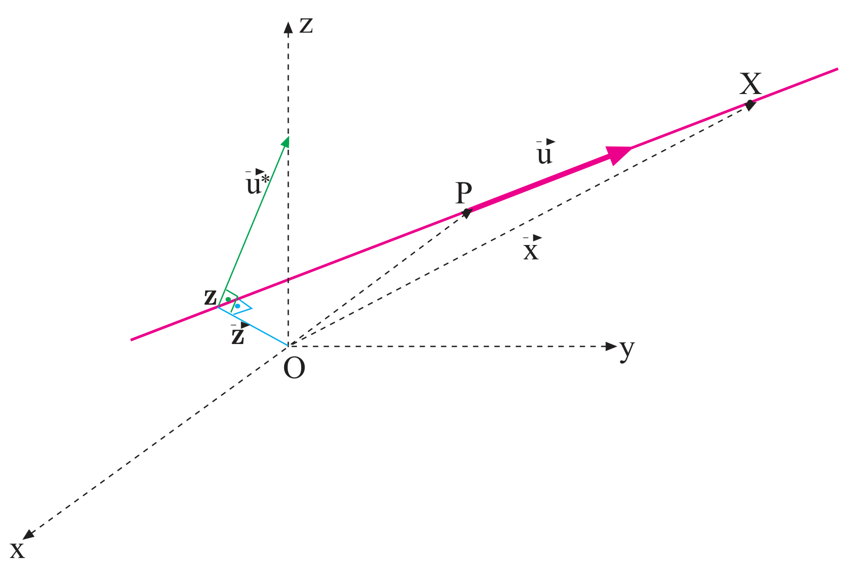
Tanım 1.1.2

$$\mathfrak{DS} = \{\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \epsilon\overrightarrow{a^*} \mid \|A\| = (1,0), \quad \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathfrak{D}^3$$

cümlesine birim dual küre denir.

Teorem 1.1.3 ***(E. STUDY)*** *Birim dual kürenin noktaları $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrular ile birebir eşlenir.*

İspat. İspat için $\mathbb{R}^3$ deki her yönlü doğrunun bir tek birim dual vektör tanımladığını ve her birim dual vektörün de $\mathbb{R}^3$ te bir tek yönlü doğru tanımladığını göstermek yeter.



Şekil 1.1:

Doğrunun vektörel denklemini

$$(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) \times \overrightarrow{u} = 0$$

vektörel çarpımıyla ele alalım. Vektörel denklemde $= 0$ dan dolayı, $\|\overrightarrow{u}\| = 1$ alınması genelliği bozmaz.

$$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u^*}$$

vektörüne, $\overrightarrow{u}$ vektörünün O noktasına göre *vektörel momenti* adı verilir. $\overrightarrow{u^*}$ vektörü, X noktasının doğru üzerindeki seçilişinden bağımsızdır.[4]

Dolayısıyla X gezici temsilci nokta, O noktasının doğru üzerindeki dikme ayağı olan Z noktası alınabilir. $\overrightarrow{u^*} = \overrightarrow{OZ}$ olup, $\left\|\overrightarrow{u^*}\right\|$, doğrunun O ya uzaklığıdır ve $\left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u^*} \right\rangle = 0$ dır. Böylece, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u^*})$ vektör çifti,

$$
\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}\| &= 1, \\
\left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u^*} \right\rangle &= 0
\end{aligned}
$$

özelliklerini gerçekleyen bir vektör çiftidir ve $\overrightarrow{u} + \epsilon\overrightarrow{u^*}$ dual vektörü için,

$$\left\|\overrightarrow{u} + \epsilon\overrightarrow{u^*}\right\| = 1$$

dir. Yani, $\overrightarrow{u} + \epsilon\overrightarrow{u^*} \in \mathfrak{DS}$ dir. Sonuç olarak, $\mathbb{R}^3$ te bir yönlü doğru verildiğinde tek türlü belli bir $\overrightarrow{u} + \epsilon\overrightarrow{u^*}$ dual birim vektörü elde edilebilir. Şimdi ispatın diğer yönüne geçelim.

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u^*}) \in \mathfrak{DS}$ verilsin. $\|\overrightarrow{u}\| = 1$, $\left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u^*} \right\rangle = 0$ dır.

Orijinden geçen ve $\overrightarrow{u^*}$ a dik olan düzlem E olsun. O merkezli, $\left\|\overrightarrow{u^*}\right\| = r$ yarıçaplı çember çizilsin. Bu çemberin teğet vektörlerinin, $\overrightarrow{u}$ ve $-\overrightarrow{u}$ ile çakıştığı noktalardaki doğrulara bakalım. A ve$B$ noktalarından geçen, $\overrightarrow{u}$ ve $-\overrightarrow{u}$ yu doğrultman vektörü kabul eden iki doğru vardır. $\overrightarrow{u}$ nun belirlediği yöne sahip olan doğru $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u^*})$ ile tek türlü belli doğrudur. ■

1.2 $\mathfrak{DS}$ ÜZERİNDEKİ İÇ-ÇARPIMIN YORUMU

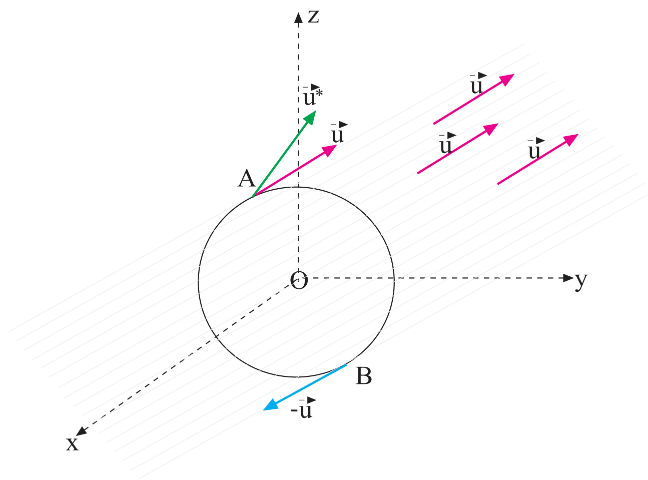
$\mathfrak{D}^3$ de iki $D_1 = \overrightarrow{u} + \epsilon\overrightarrow{u^*}$, $D_2 = \overrightarrow{v} + \epsilon\overrightarrow{v^*}$ dual vektörünün iç çarpımı,

$$
\begin{aligned}
\langle D_1, D_2 \rangle &= \left\langle \overrightarrow{u} + \epsilon\overrightarrow{u^*}, \overrightarrow{v} + \epsilon\overrightarrow{v^*} \right\rangle \\
&= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \epsilon(\left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{u^*}, \overrightarrow{v} \right\rangle)
\end{aligned}
$$

dir. $D_1, D_2 \in \mathfrak{DS}$ olsun. D_1 ile belli olan yönlü doğru d_1 ve D_2 ile belli olan yönlü doğru d_2 olsun.

[4]Doğru üzerinde X den başka bir Y noktası seçilmiş olsaydı.

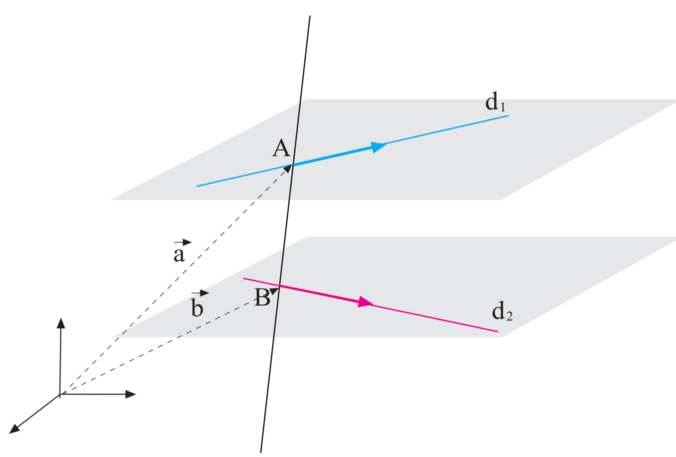
$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{p}) \times \overrightarrow{u} &= 0 \Rightarrow \overrightarrow{y} \times \overrightarrow{u} - \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{u} = 0 \\
&\Rightarrow \overrightarrow{y} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u^*}
\end{aligned}
$$



Şekil 1.2:

d_1 için, $\overrightarrow{u}$ doğrultman vektörü, $\overrightarrow{u^*}$ vektörel moment , d_2 için, $\overrightarrow{v}$ doğrultman vektörü, $\overrightarrow{v^*}$ vektörel momenttir.

d_1 ve d_2 doğrularının ortak dikme ayakları A ve B noktaları olsun.
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u^*}$, $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v^*}$



Şekil 1.3:

$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ vektörü her iki doğruya da diktir ve $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$

olup, d_1 ve d_2 arasındaki uzaklık θ^* ise

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|}\theta^*$$

dır.

$$\langle D_1, D_2\rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle + \epsilon(\left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v^*}\right\rangle + \left\langle \overrightarrow{u^*}, \overrightarrow{v}\right\rangle)$$

iç çarpımına dönelim. Reel kısım için;

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle &= \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta, \quad \theta = açı(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

dır. Dual kısmı hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v^*}\right\rangle + \left\langle \overrightarrow{u^*}, \overrightarrow{v}\right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{v}\right\rangle + \langle \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle \\ &= (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ &= -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{a}) \\ &= -\left\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{b}\right\rangle + \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{a}\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|}\theta^*, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right\rangle \\ &= \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \, \theta^* \\ &= \|\overrightarrow{u}\| . \|\overrightarrow{v}\| . \sin\theta.\theta^* \\ &= \sin\theta.\theta^* \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \langle D_1, D_2\rangle &= \cos\theta + \epsilon\sin\theta.\theta^* \\ &= \cos(\theta + \epsilon\theta^*) \end{aligned}$$

$\theta+\epsilon\theta^*$ a dual açı denir. θ iki doğru arasındaki açıdır ve θ^* iki doğru arasındaki (en kısa) uzaklıktır.