Bölüm 1

IV. DERS DİFERENSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR

Bir önceki bölümde bir yüzeyin noktalarının yeterince küçük komşuluklarıyla ilgilenebildik. Bu prosesin soyut realizasyonu için, sonuçta bizi diferensiyellenebilir manifold kavramına götürecek olan atlas veya diferensiyellenebilir yapı kavramlarını takdim edeceğiz.
Kavramlar $n > 2, 3$ boyutlar için de geçerlidir. Sunumu kolaylaştırmak için, n boyutu 2 veya 3 alınacaktır.

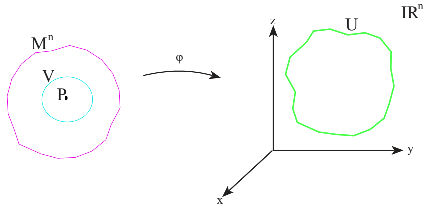
Tanım 1.0.1 *Bir topolojik uzay,*

1) Haussdorff uzayıdır,

2) İrtibatlıdır,

3) Her noktası, $\mathbb{R}^n$ *in bir açık alt cümlesine homeomorfik olan bir komşuluğa sahiptir.*

özelliğine sahip $n-$*boyutlu topolojik manifold olarak adlandırılır. (*M^n *şeklinde gösterilir.)*



Şekil 1.1:

M^n bir $n-$boyutlu topolojik manifoldu göstersin. M^n nin açık alt cümlelerinin numaralanmış (indexed) bir cümlesi $V = \{V_\alpha\}$ olsun. Eğer, M^n nin her noktası için bu noktayı ihtiva edenen azından bir V_α var ve $\bigcup\limits_\alpha V_\alpha = M^n$ ise V ye M^n nin bir açık örtüsü denir. $V = \{V_\alpha\}$ açık örtüsü verildiğinde, herbir V_α için V_α yı $\mathbb{R}^n$ nin bir U_α sına irtibatlandıran bir de ϕ_α homeomorfizmi vardır. Böylece, $V = \{V_\alpha\}$ dan hareketle bir

$$A = \{(V_\alpha, \phi_\alpha) \mid \phi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha\}$$

koleksiyonu elde edilir. A koleksiyonundaki herbir (V_α, ϕ_α) ikilisine M^n için koordinat dönüşümü veya harita denir. A koleksiyonundaki herhangi iki (V_α, ϕ_α), (V_β, ϕ_β) haritaları için, $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ iken,

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta) \to \phi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$$

bileşke dönüşümleri $r-$mertebeden diferensiyellenebilir ise $A = \{(V_\alpha, \phi_\alpha)\}$ koleksiyonuna M^n için "diferensiyellenebilir atlas" adı verilir.

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu üstündeki tüm diferensiyellenebilir yapıların cümlesi A^* ile gösterilsin. A^* üstünde bir bağıntıyı şöyle tanımlayalım.

$$A_i \sim A_j \Leftrightarrow A_i \cup A_j \in A^*$$

$\sim$ bağıntısı A^* üstünde bir denklik bağıntısıdır. Böylece, $A^*/\sim$ bölüm uzayının denklik sınıfları söz konusudur. Herbir denklik sınıfına bir "n. mertebeden diferensiyellenebilir yapı" denir.

Tanım 1.0.2 *$n-$boyutlu bir topolojik manifold üzerindeki diferensiyellenebilir yapıyla birlikte $n-$boyutlu diferensiyellenebilir manifold olarak adlandırılır.*

Not 1.0.3 *Not: Denklik sınıfları, cümlenin cümlenin herhangi bir elemanıyla temsil edilebileceğinden bir M, $n-$topolojik manifoldu üzerinde bir diferensiyellenebilir yapı bulmak için, M nin bir diferensiyellenebilir atlasını bulmak yeterlidir.*

Özet 1.0.4 *Bir* M $(\neq \emptyset)$ *cümlesinin* $n-$*boyutlu diferensiyellenebilir manifold olması için sağlaması gereken tüm şartlar toplu olarak şöyledir:*

Topolojik manifold olma şartları (1-4):

1) M *bir topolojik uzaydır. Yani,* M *nin alt cümlelerinin bir kolleksiyonu* τ *olmak üzere;*

1.1. $\emptyset, M \in \tau$,

1.2. $U_\alpha \in \tau,\ \bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$,

1.3. $U_\alpha \in \tau,\ \bigcup_{\alpha=1}^{n} \bigcap_{\alpha} U_\alpha \in \tau$

şartları sağlanıyor.

2) M *bir Haussdorff uzaydır. Yani;* $\forall\ p, q \in M$, $p \neq q$ *için,* $p \in V_p$, $q \in V_q$ *açıkları*

$$V_p \cap V_q = \emptyset$$

olacak şekilde vardır.

3) M *irtibatlıdır. Yani,* M *ayrık iki açık alt cümlenin birleşimi olarak yazılamaz.*

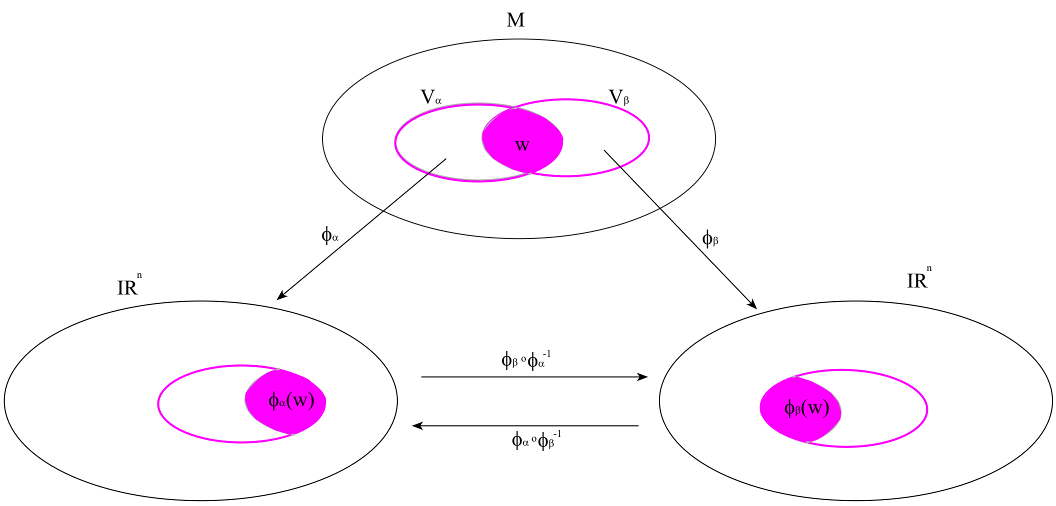
4) $\forall\ p \in M$ *için* $\exists\ V_p \subset M$, $\ni p \in V_p$ *ve* $\exists\ \varphi$ *homeomorfizmi*

$$\varphi : V_p \subset M \to U \subset \mathbb{R}^n \text{ (1-1, örten, sürekli, } \varphi^{-1} \text{ sürekli)}$$

olacak şekilde vardır (U*,* $\mathbb{R}^n$ *de açık).*

5) M *üzerindeki bir* $A = \{(V_\alpha, \phi_\alpha)\}$ *atlası için;*

şeklinde görülen



Şekil 1.2:

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \to \phi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$$

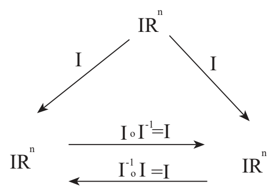
dönüşümleri diferensiyellenebilirdir (diferensiyellenebilir yapı şartı).

1.1 Manifold Örnekleri

Örnek 1.1.1 *$M = \mathbb{R}^n$ seçilsin. $\mathbb{R}^n$ üzerinde seçilen satndart topolojiye göre , topolojik uzay , irtibatlı ve Haussdorff uzay olma özelliklerine sahiptir. M üzerindeki bir kolleksiyonu, $V = \mathbb{R}^n$, $\varphi = I_{\mathbb{R}^n}$ olmak üzere;*

$$A = \{(\mathbb{R}^n, I)\}$$

olarak seçelim.



Şekil 1.3:

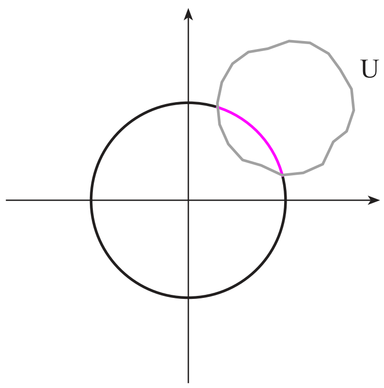
$$I \circ I^{-1} = I^{-1} \circ I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

dönüşümleri diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla $A = \{(\mathbb{R}^n, I)\}$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir diferensiyellenebilir yapı tanımlar ve bu yapıyla birlikte $\mathbb{R}^n, n-$boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

Örnek 1.1.2

$$M = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = B_0^1(1)$$

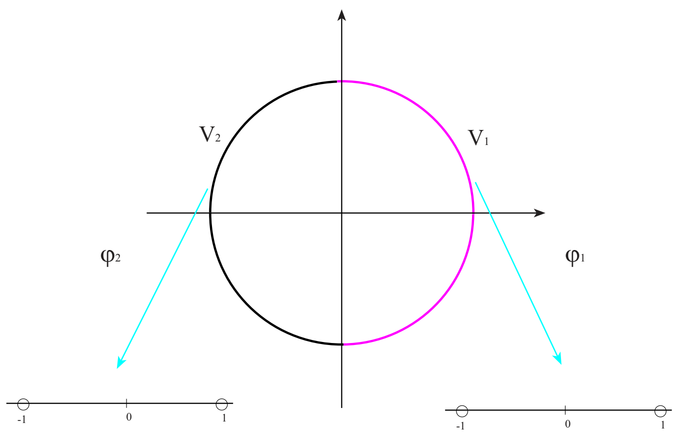
orijin merkezli $r = 1$ yarıçaplı birim çemberi ele alalım.



Şekil 1.4:

S^1 üzerindeki bir topoloji, S^1 in açıkları; $\mathbb{R}^2$ nin açıkları $U \subset \mathbb{R}^2$ ler olmak üzere; $S^1 \cap U$ alt cümleleri olarak tanımlanır. Bu açıklar S^1 üzerinde bir topoloji inşa ederler. Ayrıca S^1 topolojik uzayı, $\mathbb{R}^2$ den indirgenen bu topolojiyle Haussdorff uzayıdır ve irtibatlıdır.

Şimdi S^1 üzerinde topolojik manifold yapısı oluşturalım.



Şekil 1.5:

S^1 in açık alt cümleleri olarak; $(x,y) \in S^1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y) \mid x>0\} \\ V_2 &= \{(x,y) \mid y>0\} \\ V_3 &= \{(x,y) \mid x<0\} \\ V_4 &= \{(x,y) \mid y<0\} \end{aligned}$$

şeklinde seçilsin.

$$\bigcup_{i=1}^{4} V_i = S^1$$

olduğu aşikardır. V_i ler üzerinden φ_i ler birer homeomorfizmdirler. Mesela; φ_1 i inceleyelim.

φ_1, $1-1$ dir:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y) &= \varphi_1(x_1,y_1) \Rightarrow y = y_1 \\ &\Rightarrow \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-y_1^2} \\ &\Rightarrow x = x_1 \\ &\Rightarrow (x,y) = (x_1,y_1) \end{aligned}$$

φ_1, örtendir: $\forall\ y \in (-1,1) \Rightarrow \sqrt{1-y^2} \in (0,1)$ ve $\sqrt{1-y^2} = x$ denirse, $(\sqrt{1-y^2}, y) \in V_1$ dir ve $\varphi_1(\sqrt{1-y^2}, y) = y$ dir.

φ_1 süreklidir. φ_1 in tersi,

$$\varphi_1^{-1}(y) = (\sqrt{1-y^2}, y)$$

olup, ($y \neq \pm 1$ olduğundan) süreklidir. (Sürekli fonksiyonların cebirsel işlem altındaki sonuç dönüşümleri süreklidir.) (φ_2, φ_3, φ_4 için benzer işlemler yapılabilir.) Şimdi bu şekilde oluşturulan $A = \{(V_\alpha, \phi_\alpha)\}$ kolleksiyonunun (atlasın) diferensiyellenebilir atlas olduğunu gösterelim. $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ olduğundan, ilk olarak, (V_1, φ_1), (V_2, φ_2) ikilisini ele alalım.

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2(V_1 \cap V_2), \quad V_1 \cap V_2 = \{(x,y) \in S^1 / \ x>0,\ y>0\}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(y) &= \varphi_2(\varphi_1^{-1}(y)) \\ &= \varphi_2(\sqrt{1-y^2}) \\ &= \sqrt{1-y^2}, \quad 0<y<1 \end{aligned}$$

ve görüldüğü gibi $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ diferensiyellenebilirdir. Benzer şekilde $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ diferensiyellenebilirdir. O halde (V_1, φ_1), (V_2, φ_2) istenen şartı sağlarlar. Benzer işlemler

$$\begin{array}{c}(V_2, \varphi_2),\ (V_3, \varphi_3)\\(V_3, \varphi_3),\ (V_4, \varphi_4)\\(V_4, \varphi_4),\ (V_1, \varphi_1)\end{array}$$

koordinat komşulukları ikilileri için de kontrol edilmiştir ve sonuç olumludur.

Sonuç olarak, $A = \{(V_i, \phi_i)\}_{i=1,\ldots,4}$ atlası bir diferensiyellenebilir yapı tanımlar ve bu yapıyla birlikte S^1 bir $1-$boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

Herhangi bir cümle üzerinde diferensiyellenebilir manifold yapısı araştırılırken cümle üzerinde mevcut olan özellikler -doğal olarak-atlanır. Ayrıca manifold olma incelenirken kullanılan ve kolaylık sağlayan bazı kriterler problemler içinde ele alınacaktır. Bir diğer yöntem ise verilen noktaları ile manifold yapısı bilinen bir cümlenin noktaları arasındaki $1:1$ eşleme tesis etmektir. Önce bu son duruma örnek verelim.

Örnek 1.1.3 *$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ ile verilen cümle üzerindeki diferensiyellenebilir manifold yapısını araştıralım.*

$\mathbb{R}^n$ nin bir diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip olduğunu biliyoruz. $n = 1$ için $\mathbb{R}$ bir $1-$boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

$$\pi : \underset{(x,y)}{P} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{\pi(x,y)=x}{\mathbb{R}}$$

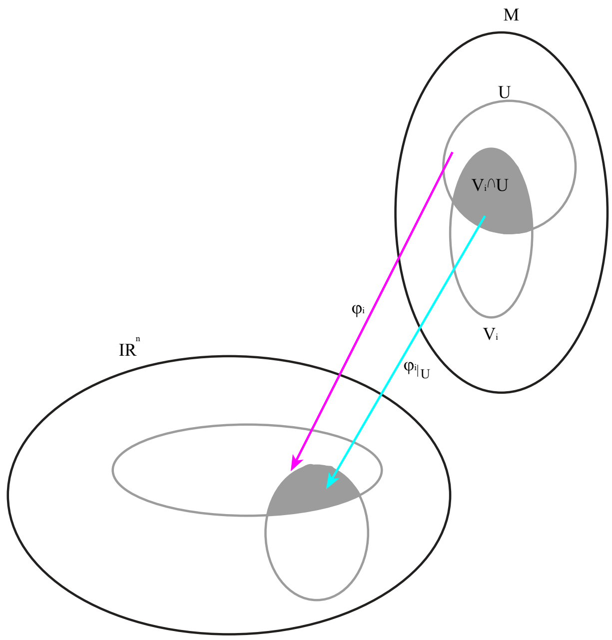
olarak tanımlanan dönüşüm $1:1$ ve örtendir. O halde P ve $\mathbb{R}^1$ arasında bu 1:1 tekabülden dolayı P bir $1-$boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

Örnek 1.1.4 *M bir $n-$boyutlu diferensiyellenebilir manifold, $U \subset M$ bir açık alt cümle olsun. "U da $n-$boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur" önermesinin doğru olduğunu gösteriniz.*

U, M den indirgenen topolojiye bağlı olarak, topolojik uzaydır, Haussdorff uzayıdır, irtibatlıdır. M üzerindeki bir atlas $A = \{(V_i, \varphi_i)\}_i$ ise,

$$A_U = \{(V_i \cap U, \varphi_i \mid_{U \cap V_i})\}$$

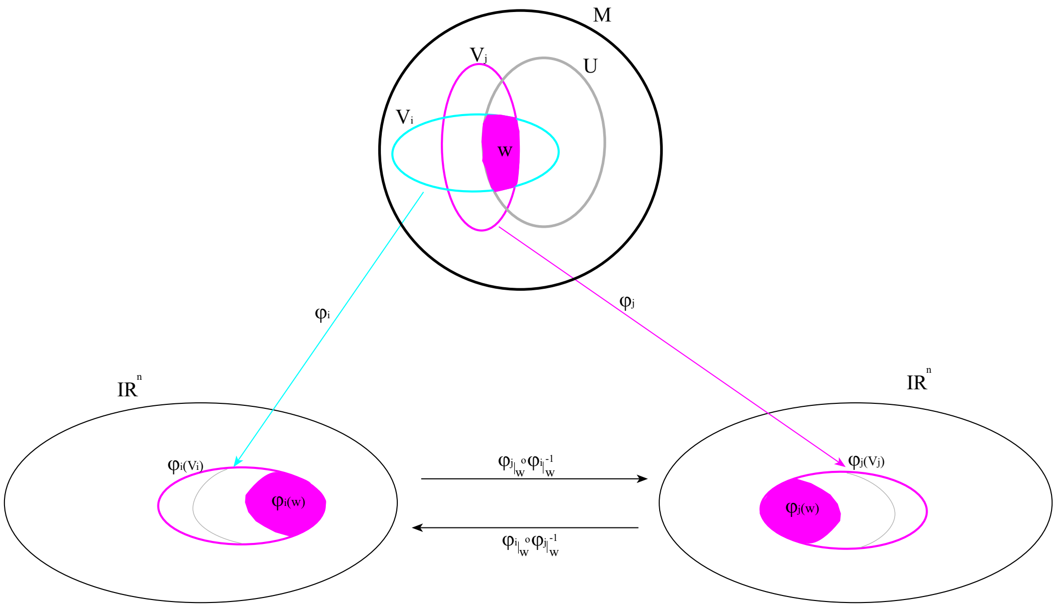
de U üstünde bir atlastır. Şöyle ki;



Şekil 1.6:

$\forall\ i$, $V_i \cap U$ bir açık alt cümledir. Analiz derslerinden bilindiği gibi, φ_i homeomorfizminin, tanım cümlesinin her açık alt cümlesine kısıtlaması da homeomorfizmdir. Dolayısıyla, A_U, U için bir atlastır ve bu atlasla birlikte U bir $n-$boyutlu topolojik manifolddur ($\bigcup_i (V_i \cap U) = U$ olduğu aşikardır).

Şimdi bu A_U atlasının diferensiyellenebilir yapı oluşturduğunu gösterelim.



Şekil 1.7:

$$\varphi_j\mid_w \circ \varphi_i^{-1}\mid_w : \varphi_i(w) \to \varphi_j(w)$$
$$\varphi_i\mid_w \circ \varphi_j^{-1}\mid_w : \varphi_j(w) \to \varphi_i(w)$$

dönüşümleri ile ilgili açık alt cümleler üzerinde diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla, A_U atlası U için bir diferensiyellenebilir atlastır ve bu atlasla birlikte U bir $n-$boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

Örnek 1.1.5 *$M = M_n^m(\mathbb{R})$, $m \times n$ tipinden bütün matrislerin cümlesinin bir $mn-$boyutlu diferensiyellenebilir manifold olduğunu gösteriniz.*

$$M = \{A = [a_{ij}]_{m\times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\},$$

$$\pi : \begin{array}{ccc} M & \to & \mathbb{R}^{mn} \\ {[a_{ij}]} & \to & \pi(a_{ij})=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n},a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n},\ldots a_{m1},\ldots a_{mn}) \end{array}$$

dönüşümü $1:1$ ve örtendir. Bu $1:1$ tekabülden dolayı, M cümlesi $\mathbb{R}^{mn}$ deki manifold yapısı taşınarak bir $mn-$boyutlu manifold yapısına kavuşturulabilir.

Örnek 1.1.6 *$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n^n,\ \det A \neq 0\}$ cümlesinin n^2-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olduğunu gösteriniz.*

M_n^n, *n^2-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifolddur. Ayrıca;*

$$\det : M_n^n \to \mathbb{R}, \ \ \det A = \sum_{S \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n}$$

olarak tanımlı det *fonksiyonu süreklidir.*

$\{0\} \subset \mathbb{R}$ *kapalı olduğundan,* $\det\{0\}^{-1} \subset M_n^n$ *kapalıdır.* $\det\{0\}^{-1}$ *in tümleyeni açıktır. Yani* $GL(n, \mathbb{R})$, $M_n^n(\mathbb{R})$ *de açıktır ve dolayısıyla* n^2-*boyutlu bir diferensiyellenebilir manifolddur.*