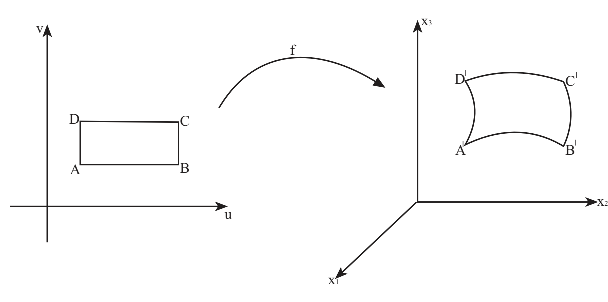
Bölüm 1

III. DERS DİFERENSİYELLENEBİLİR YÜZEYLER

1.1 YÜZEYLER:TANIM VE ÖRNEKLER

Bu kesimin amacı $\mathbb{R}^3$ de yüzeyler teorisini incelemek ve bunun içinde manifoldlar teorisinin gerekli kısmını aktarmaktır. başlangıç için önce bir yüzeyin basit bir yaması kavramı verilecek, sonra da yüzeyin formal tanımı verilecektir.

Tanım 1.1.1 $\mathbb{R}^2$ *nin kapalı bir dikdörtgen bölgesiyle sürekli* $1:1$ *tekabül içinde olan* $\mathbb{R}^3$ *ün bir alt cümlesine bir yüzeyin basit yaması denir.*



Şekil 1.1:

Bir yüzeyin bir basit yaması, pozisyon vektörleri

$$r = r(u,v) = x_1 \overrightarrow{i} + x_2 \overrightarrow{j} + x_3 \overrightarrow{k} \tag{1}$$

şeklindeki 1 : 1 ve sürekli vektör değerli fonksiyonu ile verilen noktaların cümlesidir.

Bir yüzeyin bir basit yaması için basit bir örnek olarak şu örneği verelim. $B = [a,b] \times [c,d]$ üzerinde tanımlı bir sürekli fonksiyon f olsun.

$$f : B \to \mathbb{R}^3$$

Bu durumda pozisyon vektörleri

$$r = x_1 \overrightarrow{i} + x_2 \overrightarrow{j} + f(x_1,x_2) \overrightarrow{k} \tag{2}$$

ile verilen noktaların cümlesi bir yüzeyin bir basit yamasıdır.

Tanım 1.1.2 *$\mathbb{R}^3$ ün noktalarının bir cümlesi ζ olsun. ζ irtibatlı, ζ nin her P noktasının bir U komşuluğu var ve U nun kapanışı bir basit yama ise ζ ye adi (ordinary) yüzey denir ve S ile gösterilir.*

Bu tanım topolojik açıdan verilmiştir ve diferensiyel geometri açısından yeterli ve kullanışlı değildir. (1) eşitliğine geri dönelim.

Tanım 1.1.3

$$r : G \to \zeta, \quad G = \{(u,v)\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ kapalı dikdörtgen bölge}$$

parametrik temsili verildiğinde,

1) r, G üzerinde birebirdir,

2) r, G üzerinde $s > 1$ sınıfındandır,

3) $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$ vektörel çarpımı G nin hiçbir noktasında sıfır değildir

şartları sağlanıyorsa r ye $s-$sınıfından kabul edilebilir bir temsil denir. Bu durumda, $(r, G, \mathbb{R}^3)$ veya $r(G) \subset \mathbb{R}^3$ bir diferensiyellenebilir yüzey denir.

3) şartının bir alternetifi

$$rank \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{bmatrix}_p = 2, \quad \forall p \in G$$

olarak da verilir.

$$r' : G' \to \zeta$$

bir diğer temsil

$$r' = r'(u', v') \tag{3}$$

ve r ve r' temsilleri

$$\begin{aligned} u'_1 &= \phi_1(u, v) \\ u'_2 &= \phi_2(u, v) \end{aligned} \tag{4}$$

şeklindeki 1 : 1 transormasyonlarıyla birbirine bağlı olsunlar, burada ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları $r \geq 1$ sınıfından ve görüntüleri G' olsun.

(4) eşitlikleriyle verilen transformasyonlara $r-$sınıfından düzgün (proper) veya allowable denir.

Bir transformasyonun uygun (allowable) olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Jakobiyen matrisinin G nin her noktasında sıfırdan farklı olmasıdır.

$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$ vektörel çarpımının sıfır olduğu noktalara, r ile verilen parametrizasyona bağlı olarak, yüzeyin singüler noktası denir.

$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$ vektörel çarpımının sıfırdan farklı olduğu noktaya yüzeyin regüler noktası adı verilir.

Örnek 1.1.4

$$r(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v), \quad G = (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, 1)$$

ile verilen noktalar cümlesini ele alalım. Bu noktalar cümlesi kartezyen koordinatlarda denklemi

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

olan dik dairesel silindirdir.

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$$

hesaplanırsa veya

$$rank \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2$$

olduğu tesbit edilirse $r(u, v)$ nin bir yüzey yaması olduğu görülür.

Örnek 1.1.5

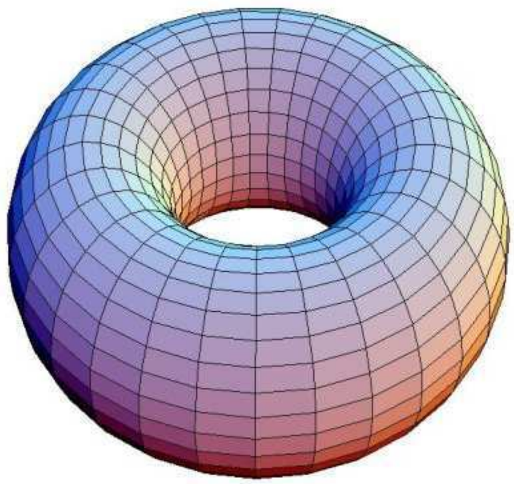
$$r : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (\cos u \sin v, \cos u \cos v, \sin u)$$

bir diferensiyellenebilir yüzeydir.

Örnek 1.1.6

$$r(u,v) = ((c + a\cos v)\cos u, (c + a\cos v)\sin u, a\sin v), \qquad u, v \in [0, 2\pi)$$

(Torus tüpünün merkezinden deliğin merkezine olan uzaklık c ve tüpün yarıçapı a olsun.) bir diferensiyellenebilir yüzeydir.



Örnek 1.1.7

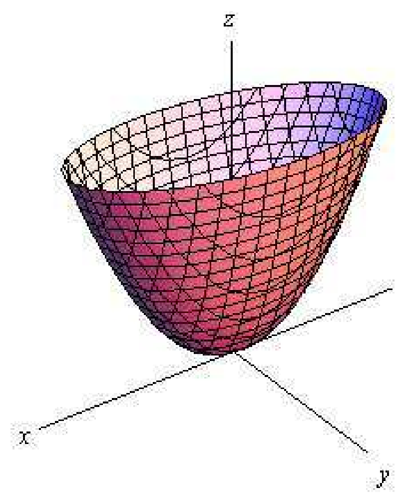
$$r(u,v) = (a\sin u\cos v, b\sin u\sin v, c\cos u)$$

(elipsoid) bir diferensiyellenebilir yüzeydir.

Örnek 1.1.8

$$r(u,v) = (au\cos v, bu\sin v, u^2)$$

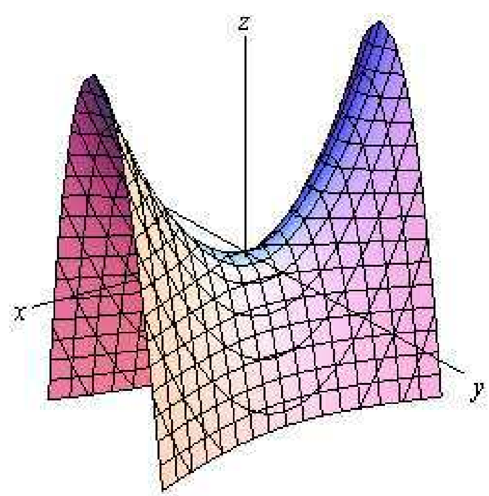
(eliptik paraboloid) bir diferensiyellenebilir yüzeydir.



Örnek 1.1.9

$$r(u,v) = (au\cosh v, bu\sinh v, u^2)$$

(hiperbolik paraboloid) bir diferensiyellenebilir yüzeydir.



1.2 PARAMETRE EĞRİLERİ, TEĞET DÜZLEM, NORMAL ve VEKTÖR ALANLARI

$G \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı

$$r : G \to S$$

yüzeyi verilsin.

$$\begin{aligned} u &= u(t) \\ v &= v(t) \end{aligned}$$

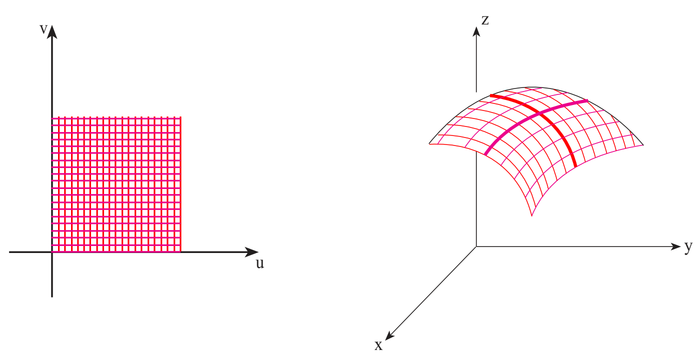
G de bir eğri olsun. Bu durumda,

$$r = r(u(t), v(t))$$

tek parametreye bağlı olması, diferensiyelleneblir olması ve S üzerinde olması sonucu olarak, S yüzeyi üzerinde bir eğridir. $u = u(t)$ ve $v = v(t)$ eğrilerini özel seçelim. u =sabit veya v =sabit alınırsa,

$$\left.\begin{array}{l} r = r(u, c) \\ r = r(c, v) \end{array}\right\}$$

parametrik eğriler elde edilir.



Şekil 1.2:

v sabit iken u parametredir. Eğri, $v-$sabit eğrisi veya $u-$ parametre eğrisi olarak adlandırılır. Benzer şekilde, u sabit iken v parametredir. Eğri, $u-$sabit eğrisi veya $v-$ parametre eğrisi olarak adlandırılır.

Yüzeyin bir regüler noktasında $r_1 \times r_2 \neq 0$ olduğundan, farklı ailelerin parametre eğrileri birbirine değmez. Parametre eğrileri için bir $p \in S$ noktasında

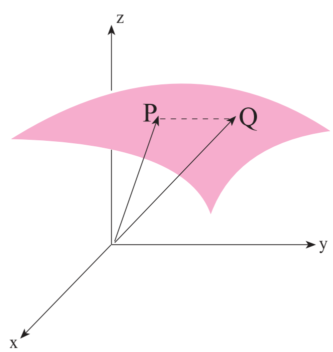
$$\langle r_1, r_2 \rangle = 0, \quad r_1 = \frac{\partial r}{\partial u}, \quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial v}$$

ise eğriler ortogonaldirler.

Genel bir yüzey üzerinde iki nokta P ve Q alınsın ve bu noktaların eğrisel koordinatları

$$(u, v) \text{ ve } (u + \partial u, v + \partial v)$$

olsunlar. P ve Q nun pozisyon vektörleri de $\overrightarrow{r}$ ve $\overrightarrow{r} + \delta \overrightarrow{r}$ ile gösterilsin.



Şekil 1.3:

$\overrightarrow{PQ}$, $Q \to P$ iken teğet doğrultusunu verir.

$$dr = \frac{\partial r}{\partial u} du + \frac{\partial r}{\partial v} dv$$

şeklinde belli olan ve P noktasında eğrinin teğet vektörü olan dr vektörüne yüzeyin teğet vektörü denir. dr, lineer bağımsız olan $r_1 = \frac{\partial r}{\partial u}, \quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial v}$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur ve bu iki vektör bir düzlem belirler. Bu düzleme S yüzeyinin P noktasındaki teğet düzlemi denir. Bu düzlemin normali (birim)

$$N = \frac{r_1 \times r_2}{\|r_1 \times r_2\|}$$

dir. $P = r(u_0, v_0)$ ve $X = (x, y, z)$ temsilci nokta olmak üzere, yüzeyin teğet düzlem denklemi

$$(X - P, r_1(u_0, v_0), r_2(u_0, v_0)) = 0$$

veya açık olarak

$$\det\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{bmatrix}_{(u_0,v_0)} = 0$$

şeklindedir, burada; $r_1(u_0,v_0) = (\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u})$, $r_2(u_0,v_0) = (\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v})$, $r(u_0,v_0) = (x_0,y_0,z_0)$ dır.

Örnek 1.2.1

$$r(u,v) = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$$

birim küre yüzeyinin $P = r(\frac{\pi}{2},0)$ noktasındaki teğet düzlem denklemini yazarak düzlemin normalini bulunuz.

$$r(\frac{\pi}{2},0) = (0,1,0)$$

$$\begin{aligned} r_1(\frac{\pi}{2},0) &= (-\sin\frac{\pi}{2}\cos 0, \cos\frac{\pi}{2}\cos 0, 0) = (-1,0,0) \\ r_2(\frac{\pi}{2},0) &= (-\cos\frac{\pi}{2}\sin 0, -\sin\frac{\pi}{2}\sin 0, \cos 0) = (0,0,1) \end{aligned}$$

olmak üzere, $P = r(\frac{\pi}{2},0)$ noktasındaki teğet düzlem denklemi

$$(X - r(\frac{\pi}{2},0), r_1(\frac{\pi}{2},0), r_2(\frac{\pi}{2},0)) = 0$$

dir ve açık şekliyle

$$\det\begin{bmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow y = 1$$

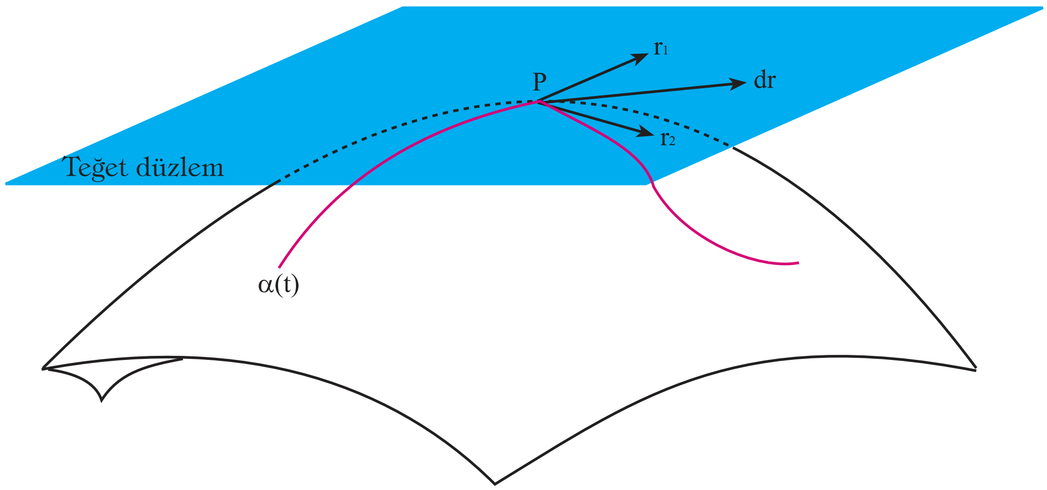
düzlemi elde edilir. Teğet düzlem denkleminin normali

$$\begin{aligned} N &= \frac{(-1,0,0)\times(0,0,1)}{\|(-1,0,0)\times(0,0,1)\|} \\ &= (0,1,0) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

1.3 BİRİNCİ TEMEL FORM

Öncelikle aşağıdaki şekli inceleyelim ve şekildeki verilere göre hareket edelim.



Şekil 1.4:

P noktasındaki teğet vektörün büyüklüğünün karesi

$$\frac{dr}{dt} = r_1\frac{du}{dt} + r_2\frac{dv}{dt}$$

den;

$$(\frac{dr}{dt})^2 = \langle r_1, r_1\rangle (\frac{du}{dt})^2 + 2\langle r_1, r_2\rangle \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \langle r_2, r_2\rangle (\frac{dv}{dt})^2$$

ve

$$E = \langle r_1, r_1\rangle, \quad F = \langle r_1, r_2\rangle, \quad G = \langle r_2, r_2\rangle$$

kısaltmasıyla,

$$(\frac{dr}{dt})^2 = E(\frac{du}{dt})^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2$$

olarak hesaplanır. Ayrıca, $\|dr\|$ nin eğri üzerindeki komşu iki nokta arasındaki eğrisel uzaklık olduğu dikkate alınırsa, ;

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{r'(\sigma)^2} d\sigma$$

integral değeri, $\overset{\frown}{PQ}$ yayının uzunluğunu verecektir.

$$(dr)^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

ifadesinin, eğrinin yay parametresinden bağımsız olduğu dikkate alınırsa, bundan böyle P ve Q arasındaki eğrisel yay uzunluğu,

$$(ds)^2$$

ile verilecektir.

Tanım 1.3.1 $E(du)^2+2Fdudv+G(dv)^2$ *kuadratik formuna yüzeyin birinci temel formu denir. E, F ve G ye yüzeyin 1. temel formunun katsayıları adı verilir.*

Kuadratik form pozitif tanımlıdır. Ayrıca,

$$E>0,\quad G>0 \text{ ve } EG-F^2=\left\|r_1\times r_2\right\|^2>0$$

dır. Şöyle ki;

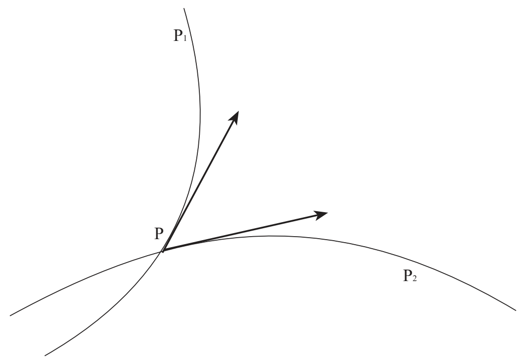
$$\begin{aligned} E &= \langle r_1,r_1\rangle>0, \quad E=\langle r_1,r_1\rangle=0 \Leftrightarrow r_1=0 \\ G &= \langle r_2,r_2\rangle>0, \quad G=\langle r_2,r_2\rangle=0 \Leftrightarrow r_2=0 \quad (\text{İç-çarpım özelliği}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EG-F^2 &= \left\|r_1\times r_2\right\|^2 \\ &= \langle r_1\times r_2, r_1\times r_2\rangle \\ &= \langle r_1,r_1\rangle\langle r_2,r_2\rangle-\langle r_1,r_2\rangle^2 \\ &= \left\|r_1\right\|^2\left\|r_2\right\|^2-\left\|r_1\right\|^2\left\|r_2\right\|^2\cos^2\theta \\ &= \left\|r_1\right\|^2\left\|r_2\right\|^2(1-\cos^2\theta) \\ &= \left\|r_1\right\|^2\left\|r_2\right\|^2\sin^2\theta>0 \quad (r_1 \nparallel r_2) \end{aligned}$$

$H=\sqrt{EG-F^2}$ değişimi yapıldığında yüzeyin birim normali

$$N=\frac{r_1\times r_2}{\left\|r_1\times r_2\right\|}=\frac{r_1\times r_2}{H}$$

eşitliği ile verilebilir. Yüzey üzerinde farklı üç nokta P, P_1 ve P_2 ve bu noktalar $P-P_1$, $P-P_2$ den geçen farklı iki eğri üzerinde olsunlar ve P deki (du,dv), $(\delta u,\delta v)$ teğet doğrultuları ile karakterize edilsinler.



Şekil 1.5:

Bu eğriler arasındaki α açısı iç-çarpım ve vektörel çarpım notasyonları ile

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\langle dr, \delta r\rangle}{\|dr\|\,\|\delta r\|} \\ N\sin\alpha &= \frac{dr\times\delta r}{\|dr\|\,\|\delta r\|} \end{aligned}$$

olarak bellidir. $\|dr\|$ yerine ds ve $\|\delta r\|$ yerine δs alınarak, açık hesaplama yapılırsa,

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\langle r_1 du + r_2 dv, r_1\delta u + r_2\delta v\rangle}{\|E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2\|\,\|E(\delta u)^2 + 2F\delta u\delta v + G(\delta v)^2\|} \\ &= \langle r_1, r_1\rangle\, du\delta u + \langle r_1, r_2\rangle\,(du\delta v + dv\delta u) + \langle r_2, r_2\rangle\, dv\delta v \\ &= Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v \end{aligned}$$

ve benzer işlemler tekrarlanırsa

$$\sin\alpha = H(du\delta v - \delta u dv)$$

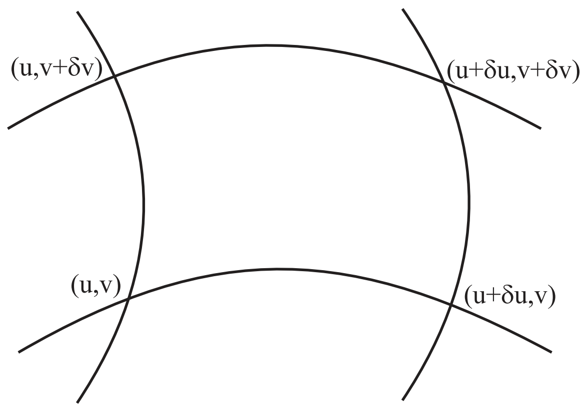
eşitlikleri elde edilir.

1.4 YÜZEY ALANI

Bir yüzey iki boyutlu bir geometrik nesnedir ve üzerinde iki boyutlu diferensiyel element (alan elementi) tanımlanabilmelidir. Bunun için aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi

$$u,\ u+\delta u,\ v,\ v+\delta v$$

eğrileri ile sınırlı sonsuz küçük paralelogramı ele alalım.



Şekil 1.6:

Vektörel cebirden bilindiği gibi, bu paralelogramın alanı

$$dA = \|dr \times \delta r\| = \sqrt{EG - F^2}\,|du\delta v - \delta u dv|$$

dir. Burada, dr ve δr yerine, parametre eğrilerinin teğet vektörleri alınırsa,

$$d\overrightarrow{r} = (du, 0), \quad \delta r = (0, dv)$$

olacağından,

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

ve sonuç olarak paralelogramın alanı, iki katlı integral notasyonlarında;

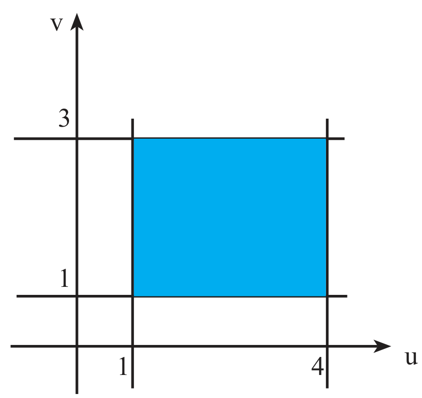
$$A = \int\int \sqrt{EG - F^2} du dv$$

olarak elde edilir.

Örnek 1.4.1 *Yüzey olarak xoy−düzlemini ele alalım. Bilindiği gibi parametre eğrileri, $x =$ sabit ve $y =$ sabit eğrileridirler. Düzlem yüzey olarak*

$$r : \underset{(u,v)}{\mathbb{R}^2} \underset{\to}{\to} \underset{r(u,v)=(u,v,0)}{\mathbb{R}^3}$$

olarak verilebilir. $P = (1, 1)$, $P_1 = (4, 1)$, $P_2 = (1, 3)$ alınsın. Paralelogramı oluşturan eğriler aşağıdaki gibidir.



Şekil 1.7:

Yüzey için

$$r_1 = \frac{\delta r}{\delta u} = (1, 0, 0)$$
$$r_2 = \frac{\delta r}{\delta v} = (0, 1, 0)$$

ve

$$E = \|r_1\|^2 = 1, \ G = \|r_2\|^2 = 1, \ F = \langle r_1, r_2 \rangle = 0$$

olup, ikinci temel form

$$ds = du^2 + dv^2$$

ve yüzey elementi

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1.1 - 0} = 1$$

olup, sınırları verilen yüzey bölgenin alanı;

$$A = \int_1^4 \int_1^3 1dudv = 6 \ br^2$$

olarak elde edilir.

Örnek 1.4.2

$$r : \underset{(u,v)}{[0,2\pi] \times [0,1]} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{r(u,v)=(\cos u, \sin u, v)}{\mathbb{R}^3}$$

şeklinde verilen dik dairesel silindir yüzeyinin alanını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} r_1 &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ r_2 &= (0,0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \langle r_1, r_1 \rangle = 1 \\ G &= \langle r_2, r_2 \rangle = 1 \\ F &= \langle r_1, r_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Bu verilere bağlı olarak, alan;

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 1 du dv = 2\pi \ br^2$$