Bölüm 1

II. DERS $\mathbb{R}^3$ te EĞRİLER ve VEKTÖR ALANLARI

Bu kesimde $\mathbb{R}^3$ eğri kavramı tanımlanacak ve geometrik özellikleri tartışılacaktır.

1.1 DİFERENSİYELLENEBİLİR EĞRİ VE PARAMETRİK TEMSİLİ

I notasyonu ile $\mathbb{R}$ nin $a < t < b$, $a < t$, $t < b$ şeklindeki aralıkları kastedilecektir.

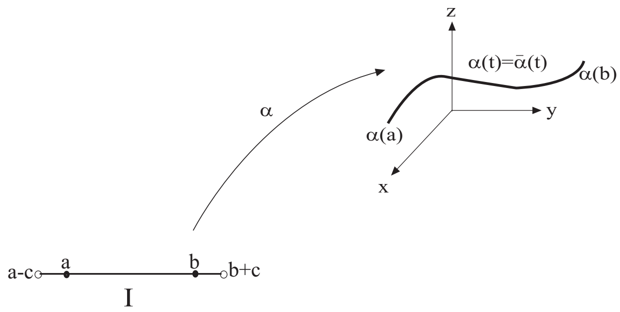
Tanım 1.1.1 $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *diferensiyellenebilir fonksiyonuna* $\mathbb{R}^3$ *te bir eğri denir.* α, C^k *sınıfından ise* α *ya* C^k *sınıfından eğri veya kısaca* C^k *eğri denir.*

α nın tanımlı olduğu I aralığı $[a, b]$ şeklinde bir kapalı aralık ise, α nın diferensiyellenebilirliğinden kastedilen şudur:

$\exists c > 0$ reel sayısı ve $\overline{\alpha} : (a-c, b+c) \to \mathbb{R}^3$ diferensiyellenebilir fonksiyonu,

$$\overline{\alpha}(x) = \alpha(x), \forall x \in [a, b]$$

olacak şekilde var ise α ya diferensiyellenebilir eğri denir.



Şekil 1.1:

$\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ ye eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları denir. $I = [a, b]$ ise uç noktalar eğriye aittir.

$t \in I$ için, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ olup, α_i ler α eğrisinin koordinat temsili olan fonksiyonlardır.

$(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ ifadesine eğrinin "parametrik temsili" denir.
$t \in I \subseteq \mathbb{R}$ parametresi zaman parametresi gibi düşünülürse $\alpha(t)$ eğrisi hareketli bir noktanın $\mathbb{R}^3$ deki yörüngesi olarak ele alınabilir.

Örnek 1.1.2 *α eğrisi, koordinat fonksiyonları $t \in I$ ya göre lineer olan eğriyi yazalım. Bu eğri;*

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= u + t\overrightarrow{v} \\ &= (u_1 + t\overrightarrow{v_1}, u_2 + t\overrightarrow{v_2}, u_3 + t\overrightarrow{v_3}) \end{aligned}$$

ile verilir. $\alpha(t)$, u dan geçen ve doğrultman vektörü $\overrightarrow{v}$ olan doğru olur.

Örnek 1.1.3 $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$, *$xy-$düzleminde $r > 0$ yarıçaplı çember eğrisi*

Örnek 1.1.4 $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, bt)$, *$r$ yarıçaplı dik silindir üzerine kurulu, b adımlı helis eğrisi*

Örnek 1.1.5 $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ *($0 < t < 1$) parabol eğrisi parçası*

Örnek 1.1.6 $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ *($-\infty < t < \infty$) kübik eğri*

1.1.1 Eğriler Hakkında Bazı Sorular ve Cevapları

Eğri tanımı ve örnekleri bir önceki kesimde verilmişti. Şimdi bazı uyarılar yapacağız. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ olarak ifade etmeye eğrinin parametrik ifadesi denir. $\alpha_i(t)$ koordinat fonksiyonları arasında t yi yok etmek mümkün ise eğriyi bir denklemle ifade etmek olasıdır. $\mathbb{R}^2$ de bu tek denklemle, $\mathbb{R}^3$ te ise iki denklemle olabilir.

1) $\mathbb{R}^2$ deki bir eğri bir tek denklemle ifade edilebilir:

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2,$$

$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

$$\left.\begin{array}{r} x = \alpha_1(t) \\ y = \alpha_2(t) \end{array}\right\}$$

sisteminin çözümü tek parametreye bağlıdır. t yok edilirse bir $F(x, y) = 0$ denklemi eğriyi ifade edecek şekilde elde edilir. Böylece $F(x, y) = 0$, bu eğriyi tek türlü belirler.

Örnek 1.1.7

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \cos t \\ \alpha_2(t) &= \sin t \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array}\right\} \ t \textit{ yok edilirse}$$

eğrinin deklemi olarak

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ F(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

2) $\mathbb{R}^3$ de tek denklem bir yüzey belirtir. Bir eğri böyle iki denklemle verilir.
Mesela, $x_2 = x_1^2$ ve $x_1 x_3 = x_2^2$ yüzeylerinin arakesit eğrisi $(t, t^2, t^3) = \alpha(t)$ dir.

$\mathbb{R}^3$ te bir $F(x,y,z)=0$ eşitliği bir yüzey belirtir. $\mathbb{R}^3$ te bir

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3,$$

$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

eğrisi parametrik ifadesiyle verilsin.

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha_1(t) \\ y = \alpha_2(t) \\ z = \alpha_3(t) \end{array}\right\}$$

yazılsın. Buradan bir $F(x,y,z)=0$ denklemi elde edilse bile bu bir yüzey denklemidir ve bu yüzey, $\alpha(I)$ yı içinde barındıran bir yüzeydir. Bu nedenle, $\mathbb{R}^3$ de bir eğri tek denklemle verilmez. Ancak $\mathbb{R}^3$ te iki yüzeyin arakesiti olarak bir eğri tanımlanabilir. Buna en güzel örnek koniklerdir. Mesela bir elips bir dik dairesel silindir ve bir düzlemin arakesitidir.

Örnek 1.1.8

$$x^2+y^2+z^2=1$$

küre yüzeyi ve

$$x^2+y^2=1, \quad z=k$$

dik dairesel silindir yüzeyinin arakesit eğrisini bulunuz.

Çözüm için bu iki yüzeyin arakesitini bulalım:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= x^2+y^2 \\ z^2 &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Yani arakesit eğrisi $z=0$ düzlemindeki çember eğrisidir.

3) Verilen bir eğri birden fazla şekilde parametrelendirilebilir.

Uyarı 3 bir diğer soruyu gündeme getirir. Bir eğriyi verilen parametrik temsil ile ifade etmek tek türlü müdür?

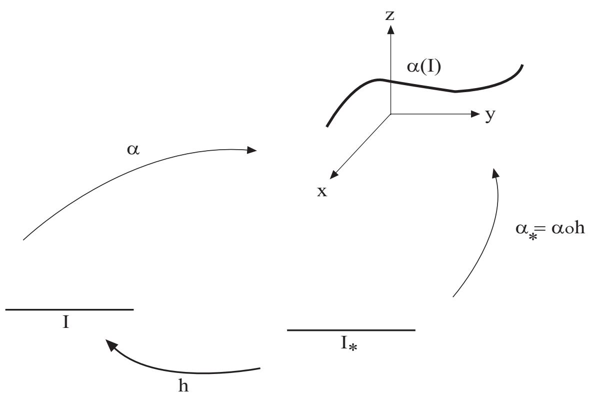
Yani, $(t,t^2,0)$, $\alpha_1 : I_1 \to \mathbb{R}^3$ ve $(\frac{1}{2}t_*, \frac{1}{4}t_*^2, 0)$, $\alpha_2 : I_2 \to \mathbb{R}^3$ verilen iki eğri olsun, bu eğriler farklı mıdır? Ortak özellikleri nelerdir?

Bu sorulara cevap arayalım.

Tanım 1.1.9 *I, $I_* \subset \mathbb{R}$ açık aralıklar, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri $h : I_* \to I$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.*

$$\alpha \circ h : \alpha_* : I_* \to \mathbb{R}^3$$

diferensiyellenebilir fonksiyonu bir eğridir ve α nın yeniden parametrizasyonu olarak adlandırılır.



Şekil 1.2: Eğrilerin farklı parametrelerle temsili

Genel olarak $t \neq t_*$ olduğundan, $\alpha_*(t_*)$ ile $\alpha(t)$ ye ulaşmak farklı, ama bir bütün olarak düşünüldüğünde $\alpha(I)$ ile $\alpha_*(I_*)$ aynıdırlar. α_* üzerindeki bir noktayı bulmak için α nın $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ koordinatlarında $t = h(t_*)$ yazmak yeterlidir.

Tanım 1.1.10 *$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verildiğinde, $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α ya regüler eğri denir.*

Örnek 1.1.11

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$

$I = [0, 2\pi]\,, \quad I_* = [0, \pi]\,,$

$$h : I_* \to I, \quad h(s) = 2s,$$

$$\begin{aligned} \alpha_*(s) &= (\alpha \circ h)(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(2s) \\ &= (\cos 2s, \sin \underbrace{2s}_{t}) = (\cos t, \sin t) = \alpha(t) \end{aligned}$$

Tanım 1.1.12 *Yukarıdaki kabul ve notasyonlarla, eğer h regüler yani*

$$\frac{dh}{dt_*} \neq 0, \forall t_* \in I_*$$

ise $h : I_* \to I$ dif. bilir fonksiyonuna kabul edilebilir(allowable) parametre fonksiyonu denir.

$\mathbb{R}^3$ te tanımlı olan tüm C^k eğriler cümlesi $C^k(\mathbb{R}^3)$ olsun.

Tanım 1.1.13 *α, $\alpha_* \in C^k(\mathbb{R}^3)$ için, $\exists$ h, C^r parametrik fonksiyonu*

$$\alpha_* = \alpha \circ h$$

olacak şekilde var ise α ve α_* a bağlantılıdırlar denir.

Verilen bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Şöyle ki;
Yansıma özelliği:

$$\alpha \circ I = \alpha \text{ ve } I \text{ regüler olduğundan } \alpha \sim \alpha$$

Simetri özelliği:

$$\alpha \sim \alpha_* \Rightarrow \alpha \circ h = \alpha_* \Rightarrow \alpha = \alpha_* \circ h^{-1} \Rightarrow \alpha_* \sim \alpha$$

Geçişme özelliği:

$$\alpha \sim \alpha_* \text{ ve } \alpha_* \sim \alpha_{**} \Rightarrow \alpha \circ h = \alpha_* \text{ ve } \alpha_* \circ h' = \alpha_{**} \Rightarrow \alpha \circ h \circ h' = \alpha_{**} \Rightarrow \alpha \sim \alpha_{**}$$

$C^k(\mathbb{R}^3)/\sim$ bölüm uzayında her bir denklik sınıfı bir C^k eğridir. Her denklik sınıfı bir elemanıyla temsil edilebildiğinden temsilci bir elemanla işlem yapmak yeterlidir.

Tanım 1.1.14 *Bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verildiğinde bir $p > 0$ sayısı*

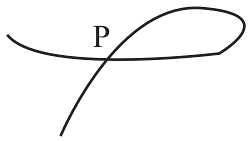
$$\alpha(t+p) = \alpha(t), \quad \forall t \in I$$

olacak şekilde var ise eğriye periyodiktir denir. Böyle sayıların en küçüğüne eğrinin periyodu denir.

Kapalı olmayan bir eğriye bazen yay adı verilir. Böyle bir eğrinin her parametrizasyonu 1:1 dir. Mesela,

$$\alpha(t) = (r\cosh t, r\sinh t, 0), \quad x_1 > 0$$

hiperbol eğrisi (tek kanat) bir yaydır.
Bir C eğrisi kendini bir P noktasında kesiyor ise P ye C nin katlı noktası denir.



Şekil 1.3: Katlı noktalı eğri

Tanım 1.1.15 *Katlı noktası olmayan bir C eğrisine basit eğri denir.*

Çember, elips, hiperbol basit eğri örnekleridirler. Basit eğri, kendini kesmemek kaydıyla, kapalı eğri olabilir. Basit bir eğrinin kapalı olması için gerek ve yeter şart eğrinin bir çembere homeomorfik olmasıdır.

Bütün noktaları aynı bir düzlemde olan eğriye düzlem eğri denir. Küre, koni gibi yüzeylerle bir düzlemin arakesit eğrileri düzlem eğri örneğidirler.

Düzlem eğri olmayan eğrilere bükümlü (twisted) eğri denir.

1.2 Alıştırmalar

Alıştırma 1.2.1 *Aşağıdaki eğrilerin parametrik temsillerini bulunuz.*

a) i) $(2,3,4),(4,5,6)$ *noktalarından geçen doğru*

ii) $(2,5,8),(9,6,-3)$ *noktalarından geçen doğru*

iii) $(3,1),(5,4),(6,1)$ *noktalarından geçen çemberin kapalı denklemini ve parametrik ifadesini hesaplayınız.*

b) i) $\left.\begin{array}{c} 6x_1 - 4x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{array}\right\}$ *Düzlemlerinin arakesit eğrisi*

ii) $\left.\begin{array}{c} 6x_1 + 13x_2 - 2x_3 = 20 \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 5 \end{array}\right\}$ *Düzlemlerinin arakesit eğrisi*

Alıştırma 1.2.2 $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *fonksiyonu* $\alpha(t) = (3t, e^t, \frac{1}{t})$ *olarak verilsin.* α *nın* C^∞ *olduğunu gösteriniz.* C^∞ *ile her mertebeden diferensiyellenebilirlik kastedilir.*

1.3 HIZ VEKTÖRÜ VE YAY UZUNLUĞU

Diferensiyellenebilir eğri tanımından biliyoruz ki, eğri iyi tanımlı doğrultu ve noktaya bağlı hıza sahiptir. Ancak doğrultunun birden fazla olduğu ve hızın olmadığı özel noktalar olabilir. Mesela, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$ eğrisinin $t_0 = 0$ noktasında yön birden fazladır ve hız sıfırdır. Eğrinin hızının sıfırdan farklı olduğu noktalarda, eğri mutlak değerce ölçülebilir bir hıza sahiptir.

Bir eğrinin doğrultu ve hızı kavramları, "hız vektörü" veya "tanjant vektör" kavramı ile takdim edilir. Öncelikle bir eğrinin yay-uzunluğu kavramından bahsedelim.

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3, \qquad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

bir dif.bilir eğri olsun.

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \alpha'(t) = (\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \frac{d\alpha_3(t)}{dt})$$

olarak tanımlı olan $\alpha'(t)$ fonksiyonu da

$$\alpha' : I \to \mathbb{R}^3$$

şeklinde bir vektör değerli fonksiyondur. $\forall\ t \in I$ için $\alpha'(t)$ bir vektördür ve büyüklüğü

$$\left\|\alpha'(t)\right\| = \left\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \right\rangle^{\frac{1}{2}}$$

ile bellidir. $t = t_0$ için $\alpha(t_0)$ daki hız $\alpha'(t_0)$ dır.

$$\left\|\alpha'\right\| : I \to \mathbb{R}, \qquad t \to \left\|\alpha'(t)\right\|$$

fonksiyonuna α eğrisinin "hız fonksiyonu" denir.

Analiz derslerinden bilindiği gibi, $a, b \in I$ $(a < b)$ için

$$\int_a^b \left\|\alpha'(t)\right\| dt = \int_a^b \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2{}'(t)^2 + \alpha_3'(t)^2} dt$$

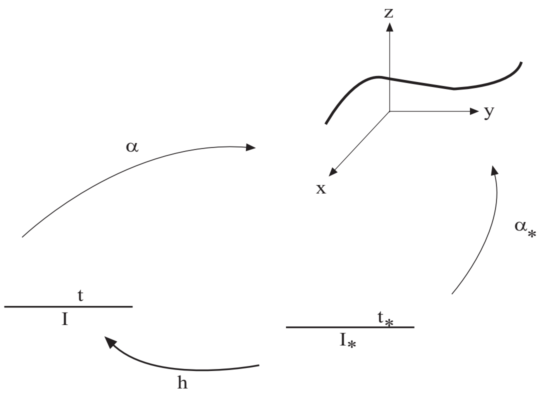
integral değeri, α eğrisinin $\alpha(a)$, $\alpha(b)$ noktaları arasındaki parçasının uzunluğunun değerini verir. b sabit değeri t değişkeni ile değiştirilirse

$$S(t) = \int_a^t \left\|\alpha'(t)\right\| dt$$

yay uzunluğu fonksiyonu olarak takdim edilir.

Lemma 1.3.1 *Bir α eğrisinin belli bir yayının uzunluğu parametre seçiminden bağımsızdır.*

İspat. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $t \to \alpha(t)$ bir dif.bilir eğri bir diğer parametrizasyonu $\alpha_* : I_* \to \mathbb{R}^3$ olsun.



Şekil 1.4:

h parametre değişimi fonksiyonu olsun. $t = h(s)$ dır. $h(s_1) = t_1$, $h(s_2) = t_2$, $I = (t_1, t_2)$, $I_* = (s_1, s_2)$ ile gösterelim.

$$\frac{d\alpha_*}{ds} = \frac{d\alpha(h(s))}{ds} = \frac{d\alpha(h(s))}{dh(s)}\frac{dh(s)}{ds} = \frac{d\alpha(t)}{dt}\frac{dh(s)}{ds} \qquad (*)$$

ve $t = h(s)$ için;

$$dt = \frac{dh(s)}{ds}ds. \qquad (**)$$

(*) denkleminin difarensiyeli alınıp (**) denklemi yerine yazılırsa

$$\frac{d\alpha_*}{ds}ds = \frac{d\alpha(t)}{dt}\frac{dh(s)}{ds}ds = \frac{d\alpha(t)}{dt}dt$$

elde edilir. Bu değerleri yay uzunluğu fonksiyonunda yerine yazarsak

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\| \frac{d\alpha_*}{ds} \right\| ds = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| dt$$

elde edilir. Bu iddia edilendi. ■

Bir eğrinin hız vektörünün bir birim uzunlukta olması ilginçtir. Şöyle ki;

$$\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3, t \to \alpha(t)$$

regüler eğrisi için

$$\left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| = 1$$

olsun. O zaman;

$$\int_a^b \left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| dt = \int_a^b dt = b - a$$

elde edilir. Yani, $\alpha(I)$ eğrisinin uzunluğu eğrinin tanımlandığı aralığın uzunluğuna eşittir. Bu da şöyle yorumlanabilir. Eğri; (a,b) açık aralığının, diferensiyel özellikleri saklı kalmak kaydıyla, fiziksel biçim değiştirmiş şeklidir. Bir eğrinin hızını 1 *birim* yapan parametreye eğrinin yay uzunluğu parametresi denir. Bu parametre genel olarak s harfiyle gösterilir.

İlginç ve kolaylaştırıcı bir özellikte, regüler her eğri için böyle bir parametrenin varlığıdır. Bunu bir lemma ile verilecektir.

Lemma 1.3.2 *Regüler her eğri yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilebilir.*

İspat. Bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regüler eğrisi verildiğinde bir $h : J \to I$ parametre değişiminin, $\|(\alpha \circ h)'(s)\| = 1$ olacak şekilde var olduğunu göstermemiz gerekir.

$t_0 \in I$ belli bir eleman olmak üzere, s yi

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\|\frac{d(\alpha)}{d(u)}\right\| du$$

şeklinde tanımlayalım. $(\alpha \circ h)(s) = \alpha_*(s)$ yi ele alalım.

$$\frac{d\alpha_*}{ds} = \frac{d\alpha}{dh(s)}\frac{dh(s)}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}.$$

Ayrıca,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{dh(s)}{ds} = \frac{1}{\frac{dh^{-1}(t)}{dt}} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}.$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\|\frac{d(\alpha)}{d(u)}\right\| du$$

eşitliğinden türev alınırsa $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|$ elde edilir. Böylece

$$\frac{d\alpha_*}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{1}{\|\alpha'(t)\|}$$

ve

$$\left\| \frac{d\alpha_*}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| \left\| \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| \frac{1}{\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|} = 1$$

bulunur. İddia doğrudur. ■

Devam eden bölümde kullanacağımız bir kavram hakkında kısa bir hatırlatma yapalım. Konunun bütünlüğü bozulmasın diye analız dersine ait hatırlatmayı önceye aldık.

Hatırlatma: (Analiz derslerinden, türev dönüşümüyle ilgili kısa bir hatırlatma)

$$F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad (1 \leq n, m \leq 3 \text{ olsun.})$$

kısmi türevlere sahip bir dönüşüm olsun. F nin türev dönüşümü TU ve $T\mathbb{R}^m$ arasında tanımlı, lineer bir dönüşümdür ve karşı gelen jakobiyen matris,

$$JF = F_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır..

F, $1:1$ ise F_* bir izomorfizmdir (Tanım, değer cümleleri üstündeki kısıtlamayla).

Mesela;

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2) \to (x_1 x_2, x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2)$$

, $p = (1, 2)$, $v = (3, -2)$ için,

$$F_* = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}, \quad F_{*|_p} = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F(p) = (2, 3, 5), \quad F_{*|_p}(v) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$F_*(v_p) = ((2, 3, 5), (4, 1, -2))$■

1.3.1 Teğet Vektör-Teğet Vektör Alanı

Bu kesimden itibaren bir eğrinin Frenet çatı alanının inşasıyla ilgileceğiz.

Bir eğri $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ diferensiyellenebilir fonksiyon ile tanımlanır. Diferensiyellenebilir eğri, iyi tanımlı doğrultu ve noktaya bağlı hıza sahiptir. İyi tanımlılıktan kasıt, parametre değişimiyle doğrultunun ve hızın sıfır olup olmamasının değişmemesidir. hızın sıfır olmadığı noktalarda, hızın kesin bir ölçüsünden bahsedemeyiz. Bu farklılık parametrizasyondan kaynaklanır. Bir eğrinin doğrultusu ve hızı kavramı hız vektörü veya tanjant vektörü çerçevesinde düşünülür.

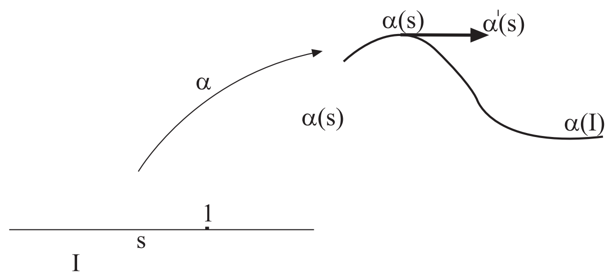
$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3,\ s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

diferensiyellenebilir bir eğri olsun.

$$\alpha_* : TI_* \to T\mathbb{R}^3,$$

$$\alpha_* = \begin{bmatrix} \frac{d\alpha_1}{ds} \\ \frac{d\alpha_2}{ds} \\ \frac{d\alpha_3}{ds} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_*(s)_s = \begin{bmatrix} \frac{d\alpha_1}{ds} \\ \frac{d\alpha_2}{ds} \\ \frac{d\alpha_3}{ds} \end{bmatrix} [1] = (\alpha_1'(s), \alpha_2'(s), \alpha_3'(s))$$



Şekil 1.5:

Tanım 1.3.3

$$t(s) = \frac{d\alpha}{ds} \mid_{\alpha(s)}$$

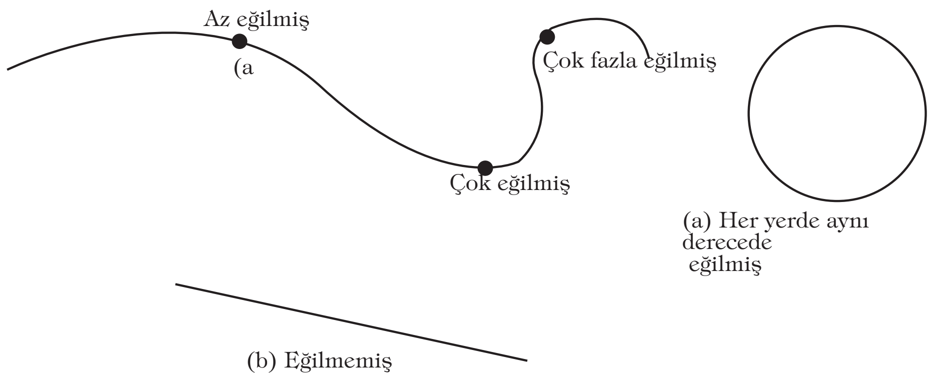
vektörüne eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektör denir.

$$t : I \to T\mathbb{R}^3, \quad s \to t(s)$$

fonksiyonuna da eğrinin teğet vektör alanı denir.

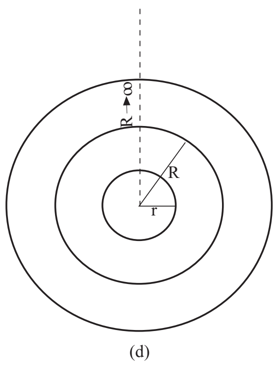
1.3.2 Oskülatör Düzlem, Oskülatör Çember, Eğrilik Vektörü, Asli Normal Vektörü

Bir eğrinin doğrultu ve hızı eğrinin tanjant vektörü (teğet vektörü) veya teğet vektör alanıyla belirtilir. Bir eğrinin bir doğtultudan özellikle teğet doğrultusundan sapmasını (ki buna eğrinin eğrilmesi denilecektir.) ölçen bir vektör var mıdır? Bu vektörün eğriyle bağlantısı nedir? Bu kesimde bu sorulara cevap aranacaktır. Aşağıdaki şekiller sezgisel olarak bir eğrinin eğrilmesi hakkında fikir vermek içindir.



Şekil 1.6:

b ve c arasında bir yakınlık kurulabilir. Bir doğru bir noktası çıkarılmış bir çemberin dejenere hali (yani yarıçapı$\rightarrow \infty$) olarak düşünülebilir.



Şekil 1.7:

Dikkat edilirse; yarıçap büyüdükçe eğilme azalmakta ve $R \rightarrow \infty$ için çember bir doğru olarak düşünülebilmektedir.

O halde yarıçapın çarpmaya göre tersi, bükülmenin kabul edilebilir bir ölçüsü olarak alınabilir. $R \to \infty$ iken,

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{R} > \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} = 0$$

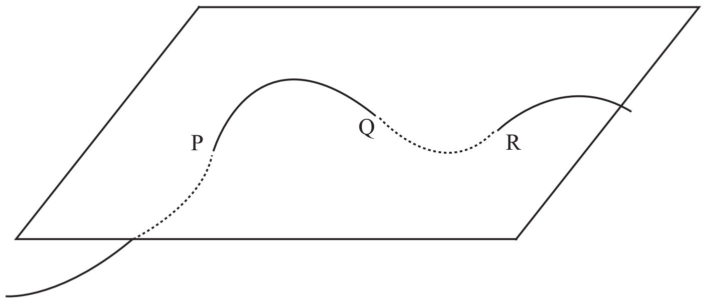
olur. Bu ilişkiyi herhangi eğrilere taşıyabilmek için, eğrinin noktaları ilgili noktada bir doğru ve çembere ihtiyaç olacaktır. Eğrinin doğrultusu, o noktadaki teğet doğrultu mevcuttur. Geriye işe yarar bir çember tanımlama kalır.

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$$

eğrisi verilsin. α üzerinde komşu üç nokta

$$\alpha(t_0),\ \alpha(t_1),\ \alpha(t_2), \qquad t_2 \to t_1 \to t_0$$

olsun. Bu üç nokta $\mathbb{R}^3$ te bir düzlem tanımlar.



Şekil 1.8:

$t_2 \to t_1 \to t_0, \quad \alpha(t_2) \to \alpha(t_1) \to \alpha(t_0)$

$R \to Q$ ve $Q \to P$ iken, eğriye ait iki tanjant vektör söz konusudur. Bunlar,

$$(\alpha(t_0), \overrightarrow{\alpha(t_0)\alpha(t_1)}) \text{ ve } (\alpha(t_1), \overrightarrow{\alpha(t_1)\alpha(t_2)})$$

tanjant vektörlerdir. Limit konumunda bu iki vektör $P = \alpha(t_0)$ noktasındaki tanjant vektörlerdir.

Tanım 1.3.4 *$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri, P, Q ve R eğri üzerinde, $Q \to P$, $R \to Q$ olan üç nokta olsun. P de belli olan PQ, QR vektörlerinin gerdiği düzleme eğrinin $P = \alpha(t_0)$ noktasındaki oskülatör (osculating) düzlemi denir.*

1.3.3 Oskülatör Düzlem Denklemi

Üç noktası belli olan düzlem denklemi bilinen bir kavramdır. Ancak burada oskülatör düzlemin denklemi eğri ve türevleri cinsinden hesaplanacaktır. Hatırlatmak gerekirse "Rolle teoremi: f, $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f(a)=f(b)$ ise enaz bir $c\in(a,b)$ reel sayısı $f'(c)=0$ olacak şekilde vardır" idi. Oskülatör düzlemin denklemini ararken kullanacağımız yardımcı bir f fonksiyonunu şöyle tanımlayalım.
Normali N olan keyfi bir düzlem D, A bu düzemin bir noktası ve A nın yer vektörü $\overrightarrow{a}$ olsun. $\left\langle \overrightarrow{a},\overrightarrow{N}\right\rangle = a$ ile gösterelim. Bir $f(t)$ fonksiyonunu $\alpha(t)$ boyunca,

$$f(t)=\left\langle \alpha(t),\overrightarrow{N}\right\rangle - a$$

olarak tanımlayalım. a, A nın seçimine bağlı olduğundan, $\forall t$ için,

$$f(t)=\left\langle \alpha(t),\overrightarrow{N}\right\rangle - a = a-a=0, \qquad \alpha(t)\in D$$

yani $f(t)$ bir sabit fonksiyondur. Rolle teoremini uygulayalım. $t=t_0$, t_1, t_2 için;

$$f(t_0)=0,\ f(t_1)=0 \text{ ve } f(t_2)=0$$

olduğundan, γ_1 ve γ_2 reel sayıları

$$\begin{aligned} f'(\gamma_1) &= 0, \quad t_0<\gamma_1<t_1 \\ f'(\gamma_2) &= 0, \quad t_1<\gamma_2<t_2 \end{aligned}$$

olacak sekilde vardır. Tekrar Rolle teoremi uygulanırsa bir γ_3 reel sayısı

$$f''(\gamma_3)=0, \quad \gamma_1<\gamma_3<\gamma_2$$

olacak şekilde bulunabilir.

Şimdi seçilen bu düzlemin eğriye ait oskülatör düzlem olması durumuna dönelim.

$$\alpha(t_2)\to\alpha(t_1)\to\alpha(t_0)$$

iken t_1, t_2, γ_1, γ_2 ve $\gamma_3\to t_0$ dır. Bu durumda,

$f(t)=\left\langle \alpha(t),\overrightarrow{N}\right\rangle - a = 0$ ve $a=\langle X,N\rangle$ (X bir temsilci nokta olduğundan)

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left\langle \alpha'(t),\overrightarrow{N}\right\rangle = 0 \\ f''(t) &= \left\langle \alpha''(t),\overrightarrow{N}\right\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle X-\alpha(t),N\rangle &= 0\\ \left\langle \alpha'(t),N\right\rangle &= 0\\ \left\langle \alpha''(t),N\right\rangle &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $X-\alpha(t)$, $\alpha'(t)$ ve $\alpha''(t)$, normali N olan düzlemdedirler. O halde,

$$X-\alpha(t)=\lambda\alpha'(t)+\mu\alpha''(t)$$

lineer bağıntısı sağlanır. Karma çarpım notasyonlarıyla,

$$\det(X-\alpha(t),\alpha'(t),\alpha''(t))=0$$

dır.

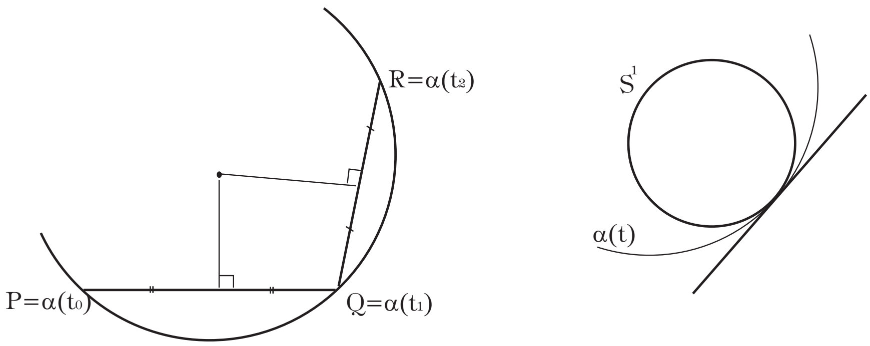
Eğri yay parametresi ile verilmiş ise türev $()'$ ile gösterilirse, oskülatör düzlemin denklemi,

$$\det(X-\alpha(s),\alpha'(s),\alpha''(s))=0$$

ile verilir.

$\alpha''(s)\neq 0$ ise, s ye yakın $s_0,$ s_1, s_2 için $\alpha(s_0)$, $\alpha(s_1)$, $\alpha(s_2)$ aynı bir doğru üzerinde olamaz.

Bir α eğrisinin komşu üç $\alpha(t_0)$, $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$ noktalarının aynı doğru üzerinde olmadığını varsayalım. $(\alpha''\neq 0)$



Şekil 1.9:

Bu üç nokta bir çember üzerindedir ve bu çemberin merkezi PQ ve QR kirişlerinin orta dikmelerinin kesim noktasıdır.

$$\alpha(t_2)\to\alpha(t_1)\to\alpha(t_0)$$

limit konumunda bu ardışık üç noktadan geçen iyi tanımlı bir çember vardır ve bu çemberin merkezi $\alpha(t)$ noktasında eğrinin teğetine dik olan doğrultu üzerindedir. Bu çembere (S' ile gösterilecek) eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğrilik (oskülatör) çemberi denir.

Tanım 1.3.5 *$\alpha(t)$ eğrisinin bir noktasındaki S' eğrilik çemberinin yarıçapının çarpım inversine eğrinin o noktadaki (mutlak) eğriliği, çemberin merkezine de eğrilik merkezi denir.*

Tanım 1.3.6 *($\alpha''(t) = 0 \vee \alpha''(t) = \lambda\alpha'(t)$) ve $\alpha'''(t) \neq 0$ eşitliklerini sağlayan bir noktaya eğrinin bükülme (inflexion-eğrilme) noktası denir.*

Not: Böyle bir noktada oskülatör düzlemi tanımlı ama oskülatör çemberi tanımlı değildir.

Şimdi mutlak eğriliğin nasıl hesaplanacağını bir teoremle verelim.

Teorem 1.3.7 *Bir $\alpha(s)$ eğrisinin mutlak eğriliği, $\overrightarrow{\alpha'(s)} = \overrightarrow{t}$ olmak üzere, $\left\| \overrightarrow{t}' \right\|$ dür.*

İspat. α eğrisi, yay uzunluğu parametresiyle verilmiş olsun.

$$\overrightarrow{t} = \frac{d\alpha}{ds}, \quad s \in I \subseteq \mathbb{R}$$

$$\langle t, t \rangle = 1 \Rightarrow \left\langle t', t \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \alpha'', \alpha' \right\rangle = 0 \Rightarrow \alpha''(s) \perp \alpha'(s).$$

α, $\alpha'(s)$, $\alpha''(s)$ ve M (merkez) oskülatör düzlemdedir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} M - \alpha(s) &= \lambda\alpha'(s) + \mu\alpha''(s) \\ \left\langle M - \alpha(s), \alpha'(s) \right\rangle &= \lambda \left\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \right\rangle + \mu \left\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \right\rangle \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \left\langle -\alpha'(s), \alpha'(s) \right\rangle + \left\langle M - \alpha(s), \alpha''(s) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle M - \alpha(s), \alpha''(s) \right\rangle &= 1 \end{aligned}$$

$M - \alpha(s)$ ve $\alpha''(s)$ aynı doğrultuda olduğundan aralarındaki açı sıfırdır. ($\cos\theta = 1$) Normları itibariyle,

$$\begin{aligned} \|M - \alpha(s)\| \left\|\alpha''(s)\right\| &= 1 \\ \|M - \alpha(s)\| &= \frac{1}{\|\alpha''(s)\|} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde eğrilik çemberinin yarıçapı R ile gösterilirse,

$$R = \|M - \alpha(s)\| = \frac{1}{\|\alpha''(s)\|}$$

ve dolayısıyla mutlak eğrilik,

$$\frac{1}{R} = \|\alpha''(s)\| = \|t'(s)\|$$

olarak bulunur. ■

Bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin bir $\alpha(t)$ noktasında oskülatör düzleme sahip olması için $\exists k,\ k \geq 2$ için $\alpha^{(k)}(t)$ türevinin sıfırdan farklı olması gerekir. şöyle ki; (s yay parametresi olarak alınmak üzere)

$$\begin{aligned}
\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle &= 1 \Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \\
(\alpha'(s) &\perp \alpha''(s) \wedge \alpha''(s) \neq 0) \Rightarrow \text{İspat tamam} \\
\text{Eğer } \alpha''(s) &= 0 \Rightarrow \alpha'(s) \perp \alpha''(s) \Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha'''(s) \rangle + \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \\
&\Rightarrow (\alpha'(s) \perp \alpha'''(s) \wedge \alpha'''(s) \neq 0) \Rightarrow \text{İspat tamam} \\
\text{Eğer } \alpha'''(s) &= 0 \Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha'''(s) \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \langle \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle + \left\langle \alpha'(s), \alpha^{(4)}(s) \right\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \ldots \\
&\Rightarrow \alpha^{(k)}(s) \neq 0
\end{aligned}$$

elde edinceye kadar devam edilir.Bu durumda ilgili noktada oskülatör düzlem,

$$S_p\{\alpha', \alpha^{(k)}\}_s$$

düzlemidir. Ancak bu durumda $\frac{1}{\|\alpha''(s)\|}$ yarıçaplı oskülatör çember anlamsızdır.

Tanım 1.3.8 *$\alpha''(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilik vektörü denir. $\frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ birim vektörüne $\alpha(s)$ noktasındaki birim asli normal vektör ve $\alpha(s)$ den geçen ve $\alpha''(s)$ ye paralel olan doğruya da asli normal doğrusu denir.*

Birim asli normal vektörü $\overrightarrow{n}$ ve asli eğrilik k ile gösterilecektir.

$$\alpha''(s) = k(s)\overrightarrow{n}(s)$$

ve

$$R(s) = \frac{1}{|k(s)|}$$

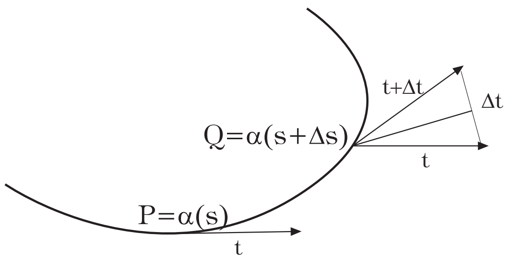
dir.

$$k \equiv 0 \Rightarrow \alpha''(s) = 0 \vee \alpha'(s) = sabit, \quad \forall s$$

dir. Doğrular eğriliği sıfır olan yegane eğrilerdir. $k(s)$ tanjant vektörlerin değişim oranını ve ayrıca eğrinin teğet doğrultusundan ne kadar saptığını gösterir. Şöyle ki; P ve Q noktalarındaki teğet vektörler

$$\begin{aligned} \overrightarrow{t}(s) &= \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{t}(s + \triangle s) &= \overrightarrow{t} + \triangle \overrightarrow{t} \end{aligned}$$

olsun.



Şekil 1.10:

$$\sin\frac{\triangle\varphi}{2} = \frac{\frac{\|\triangle \overrightarrow{t}\|}{2}}{\left\|\overrightarrow{t}\right\|} \Rightarrow \left\|\triangle \overrightarrow{t}\right\| = 2\sin\frac{\triangle\varphi}{2}, \qquad \left\|\overrightarrow{t}\right\| = 1$$

$$\left\|\triangle \overrightarrow{t}\right\| \to 0 \text{ iken } \triangle\varphi \to 0$$

ve sin fonksiyonunun seri açılımıyla,

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{\triangle\varphi}{2} &= 2(\frac{\triangle\varphi}{2} - (\frac{\triangle\varphi}{2})^3 + (\frac{\triangle\varphi}{2})^5 - ...) \\ &= \triangle\varphi + ... \end{aligned}$$

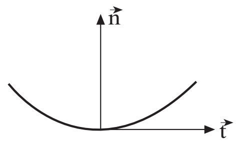
$$\left\|\triangle \overrightarrow{t}\right\| = \triangle\varphi, \quad k = \left|\frac{d\overrightarrow{t}}{ds}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$$

$\frac{d\overrightarrow{t}}{ds}$ eğrite ait $\overrightarrow{n}$ birim asli normalini tek türlü tanımlar. $\overrightarrow{n}$ nin seçimi yönlendirmeye bağlıdır. $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{n}$, $\mathbb{R}^2$ de pozitif yönlendirilmiş olarak alınacaktır.

$$\frac{d\overrightarrow{t}}{ds} = k\overrightarrow{n}$$

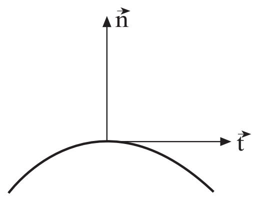
den,

$$k > 0 \text{ ise } \overrightarrow{t}, \overrightarrow{t}' \text{ pozitif yönlendirilmiş,}$$



Şekil 1.11: Pozitif yönlendirilmiş

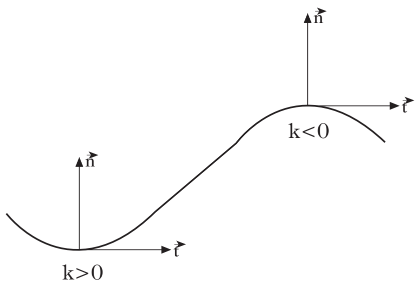
$$k < 0 \text{ ise } \overrightarrow{t}, \overrightarrow{t}' \text{ negatif yönlendirilmiş demektir.}$$



Şekil 1.12: Negatif yönlendirilmiş

Eğrinin yönlendirmesi nasıl olursa olsun. $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{n}$ ikilisi pozitif yönlü olarak alınacaktır. Ancak bu eğrilik çemberinin yerini değiştirmez. Çünkü eğrilik çemberi α'' yani t' ye göre hesaplanır.

$\overrightarrow{n}(s)$ eğri boyunca sürekli bir vektör alanı olarak ele alındığında, eğri bir infleksiyon noktasından geçiyor ise k hem pozitif hem de negatif değerler alabilir.



Şekil 1.13:

1.3.4 Burulma (Torsiyon), Binormal Vektör

Tanım 1.3.9 *$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisine ait teğet ve normal vektörler $\overrightarrow{t}(s)$ ve $\overrightarrow{n}(s)$ olmak üzere, $s_0 \in I$ için,*

$$\overrightarrow{b}(s_0) = \overrightarrow{t}(s_0) \times \overrightarrow{n}(s_0)$$

*vektörüne $\alpha(s_0)$ noktasındaki **binormal vektör** denir.*

$$b : I \to \mathbb{R}^3, \quad s \to \overrightarrow{b}(s)$$

*vektör alanına da α eğrisinin **binormal vektör alanı** adı verilir.*

Aşikardır ki $\overrightarrow{b}$, hem $\overrightarrow{t}$ ye hem de $\overrightarrow{n}$ ye dik olduğundan oskülatör düzleme diktir. Üstelik;

Teorem 1.3.10 $\frac{d\overrightarrow{b}}{ds} \parallel \overrightarrow{n}$ *dir.*

İspat.

$$\left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{t} \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{b'}, \overrightarrow{t} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{t'} \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{b'}, \overrightarrow{t} \right\rangle = 0 \Rightarrow \overrightarrow{b'} \perp \overrightarrow{t}.$$

$$\left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \right\rangle = 1 \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{b'}, \overrightarrow{b} \right\rangle = 0 \Rightarrow \overrightarrow{b'} \perp \overrightarrow{b}.$$

$$(\overrightarrow{b'} \perp \overrightarrow{t} \text{ ve } \overrightarrow{b'} \perp \overrightarrow{b}) \Rightarrow \overrightarrow{b'} \parallel \overrightarrow{n}.$$

■

Tanım 1.3.11 $\overrightarrow{b'} \parallel \overrightarrow{n}$ *olduğundan, $s \in I$ için*

$$\overrightarrow{b'}(s) = -\tau(s)\overrightarrow{n}(s)$$

*eşitliğini sağlayan $\tau(s)$ reel sayısına $\alpha(s)$ noktasında eğrinin **burulması (bükülmesi)** denir. $\tau \neq 0$ ise eğriye **bükümlü eğri** adı verilir.*

1.3.5 Frenet Çatı Alanı, Teğet, Normal ve Rektifyen Düzlemler

Bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ diferensiyellenebilir eğrisi verildiğinde, ardışık ilk üç türevin sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Bu durumda, eğri yay parametresiyle verilmiş ise,

$$\begin{aligned} \alpha' &= \overrightarrow{t} \\ \alpha'' &= k\overrightarrow{n} \end{aligned}$$

idi. Şimdi α''' ü hesaplayalım. Bunun için $\overrightarrow{n}'$ yü hesaplamamız gerekir.

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \rangle &= 1 \Rightarrow \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}' \rangle = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n}' \Rightarrow \overrightarrow{n}' \in S_p\{\overrightarrow{t}, \overrightarrow{b}\} \Rightarrow \overrightarrow{n}' = \lambda \overrightarrow{t} + \beta \overrightarrow{b} \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = \left\langle \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}' \right\rangle \\ \beta = \left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{n}' \right\rangle \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n} \right\rangle &= 0 \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}' \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{t}', \overrightarrow{n} \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}' \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{t}', \overrightarrow{n} \right\rangle = -k \\ \left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{n} \right\rangle &= 0 \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{n}' \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{b}', \overrightarrow{n} \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{n}' \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{b}', \overrightarrow{n} \right\rangle = \tau \end{aligned}$$

dolayısıyla,

$$\lambda = -k, \quad \beta = -\tau$$

dur. O halde,

$$\overrightarrow{n}' = -k\overrightarrow{t} + \tau \overrightarrow{b}$$

sonuç olarak da,

$$\begin{aligned} \alpha''' &= k'\overrightarrow{n} + k(-k\overrightarrow{t} - \tau \overrightarrow{b}) \\ \alpha''' &= -k^2\overrightarrow{t} + k'\overrightarrow{n} - k\tau \overrightarrow{b}) \end{aligned}$$

elde edilmiş olur. elde edilen eşitlikler

$$\begin{aligned} \alpha' &= \overrightarrow{t} \\ \alpha'' &= k\overrightarrow{n} \\ \alpha''' &= -k^2\overrightarrow{t} + k'\overrightarrow{n} - k\tau \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

dir. Yani, $\alpha(s)$ eğrisi boyunca tanımlı olan $\{\overrightarrow{t(s)}, \overrightarrow{n(s)}, \overrightarrow{b(s)}\}$ hareketli çatısı, $k = 1, 2, 3$ için

$$\alpha^{(k)}(s) \in S_p\{\overrightarrow{t(s)}, \overrightarrow{n(s)}, \overrightarrow{b(s)}\}$$

özelliğinde olan bir çatıdır.

Tanım 1.3.12 *$\{\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}\}(s)$ çatısına $\alpha(s) \subset \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet çatı alanı denir.*

$\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}$ vektörlerinin türevleri kendileri cinsinden hesaplanmıştı. Bunlar,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{t}' &= k\overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n}' &= -k\overrightarrow{t} + \tau\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{b}' &= -\tau\overrightarrow{n} \end{aligned}$$

idi. Bu formüllere **Frenet formülleri** denir. Bu eşitlikler matris çarpımı formunda

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{t}' \\ \overrightarrow{n}' \\ \overrightarrow{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{b} \end{bmatrix},$$

olarak da yazılabilir

Tanım 1.3.13 *Bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}\}$ olsun.*

$$S_p\{\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}\}$$

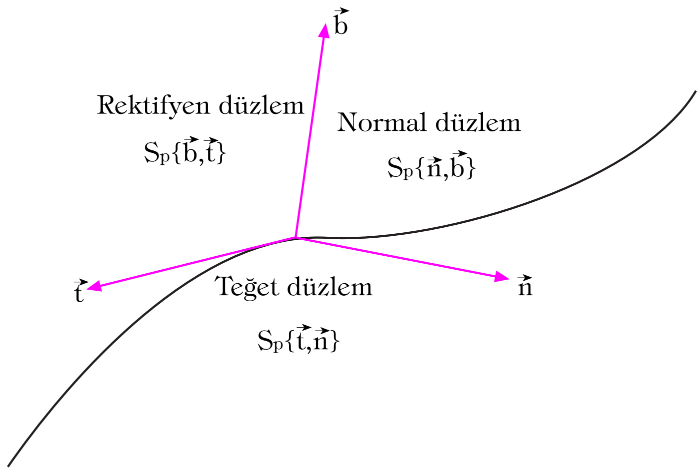
düzlemine eğrinin teğet düzlemi,

$$S_p\{\overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}\}$$

düzlemine eğrinin normal düzlemi,

$$S_p\{\overrightarrow{t}, \overrightarrow{b}\}$$

düzlemine eğrinin binormal düzlemi denir.



Şekil 1.14: Teğet düzlem, normal düzlem, rektifyen düzlem

Teğet düzlem denklemi:

$$\det(X - \alpha(s), \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}) veya \left\langle X - \alpha(s), \overrightarrow{b} \right\rangle = 0$$

Normal düzlem denklemi:

$$\det(X - \alpha(s), \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}) veya \left\langle X - \alpha(s), \overrightarrow{t} \right\rangle = 0$$

Rektifyen düzlem denklemi:

$$\det(X - \alpha(s), \overrightarrow{b}, \overrightarrow{t}) veya \langle X - \alpha(s), \overrightarrow{n} \rangle = 0.$$

1.3.6 Eğrilerin Lokal Teorisinin Temel Teoremi

Teorem 1.3.14 *$k(s) > 0$ ve $k(s)$, $s \in I$ diferensiyellenebilir fonksiyonları verildiğinde bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regüler parametrelendirilmiş eğri, eğriliği $k(s)$ ve burulması $\tau(s)$ olacak şekilde vardır. Ayrıca bir başka $\overline{\alpha}$ eğrisi aynı şartları sağlıyor ise, α ve $\overline{\alpha}$ bir katı hareketle birbirlerine dönüşür. (Yani, bu durumda, $\mathbb{R}^3$ ün bir, pozitif determinantlı, L lineer ortpgonal dönüşümü ve bir c vektörü*

$$\overline{\alpha} = L_0\alpha + c$$

eşitliğini sağlayacak şekilde vardır.)

İspat. Adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği teoreminin ispatıyla aynıdır. Bu sebeple ispat burada tekrar verilmeyecektir. ■

1.3.7 Lokal Kanonik Form ve Oskülatör Düzlemler Üzerine İzdüşüm

Bu kesimin amacı, eğrilik ve burulmanın , eğrinin bir noktası civarında eğrinin şekline nasıl etki ettiğini göstermektir.

Bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Eğrinin birinci mertebeden singüler noktaya sahip olmadığını varsayalım. Eğrinin herbir koordinat fonksiyonu diferensiyellenebilir olduğundan, Taylor serisine açılabilir. $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ için,

$$\alpha_i(s) = \alpha_i(0) + s\alpha_i'(0) + \frac{s^2}{2!}\alpha_i''(0) + ... + \frac{s^n}{n!}\alpha_i^{(n)}(0) + ...$$

olup,

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2!}\alpha''(0) + \frac{s^3}{3!}\alpha'''(0) + R$$

dir.

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \overrightarrow{t_0} \\ \alpha''(0) &= k_0\overrightarrow{n_0} \\ \alpha'''(0) &= -k_0^2\overrightarrow{t_0} + \alpha''(0) + k_0'\overrightarrow{n_0} - k_0\tau_0\overrightarrow{b_0} \end{aligned}$$

değerleri yerine yazılırsa,

$$\alpha(s) - \alpha(0) = s\overrightarrow{t_0} + \frac{s^2}{2!}k_0\overrightarrow{n_0} + \frac{s^3}{3!}(-k_0^2\overrightarrow{t_0} + \alpha''(0) + k_0'\overrightarrow{n_0} - k_0\tau_0\overrightarrow{b_0}) + R$$

$$\alpha(s) - \alpha(0) = (s - k_0^2\frac{s^3}{3!})\overrightarrow{t_0} + (k_0\frac{s^2}{2!} - \frac{s^3}{3!}k_0')\overrightarrow{n_0} - \frac{k_0\tau_0}{3!}s^3\overrightarrow{b_0} + R$$

$$s^{3+n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

kabul edilirse, $R \to 0$ olur. Böylece 0 a yeterince yakın s ler için,

$$\alpha(s) = \alpha(0) + (s - k_0^2\frac{s^3}{3!})\overrightarrow{t_0} + (k_0\frac{s^2}{2!} - \frac{s^3}{3!}k_0')\overrightarrow{n_0} - \frac{k_0\tau_0}{3!}s^3\overrightarrow{b_0} + R$$

elde edilir. $\alpha(0)$ noktasındaki çatı olarak $\{\alpha(0); \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}\}$ alınır ve $\overrightarrow{t} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{n} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{b} = (0,0,1)$ olarak düşünülürse

$$\alpha(s) = \alpha(0) + x(s)\overrightarrow{t} + y(s)\overrightarrow{n} + z(s)\overrightarrow{b}, \quad R = (R_x, R_y, R_z)$$

bulunur. Burada,

$$\left.\begin{array}{r} x(s) = s - \frac{s^3}{6}k_0^2 + R_x \\ y(s) = \frac{s^2}{2}k_0 - \frac{s^3}{6}k_0' + R_y \\ z(s) = -\frac{k_0\tau_0}{6}s^3 + R_z \end{array}\right\}$$

eşitlikleriyle verilen eğriye $\alpha(s)$ eğrisinin lokal kanonik formu denir. R_x, R_y, R_z bundan sonraki işlemlerde ihmal edilecektir. Ayrıca $s^{3+n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ olduğu hatırlanmalıdır. $\alpha(s)$ nin kanonik formu $\widetilde{\alpha}(s)$ ile gösterilirse,

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \widetilde{\alpha}(s)$$

yazılabilir. $\alpha(0)$ noktasında $\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}$ çatısı x, y, z koordinat sisteminin görevini üstlenmişti. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\alpha'(0) &= \overrightarrow{t_0} \\
\alpha''(0) &= k_0\overrightarrow{n_0} \\
\alpha'''(0) &= -k_0^2\overrightarrow{t_0} + \alpha''(0) + k_0'\overrightarrow{n_0} - k_0\tau_0\overrightarrow{b_0}
\end{aligned}$$

bileşenler cinsinden;

$$\begin{aligned}
x' &= 1, \quad y' = 0, \quad z' = 0 \\
x'' &= 0, \quad y'' = k_0, \quad z'' = 0 \\
x''' &= -k_0^2, \quad y''' = k_0', \quad z''' = -k_0\tau_0
\end{aligned}$$

ve

Teorem 1.3.15 *Eğrinin teğet, normal ve rektifyen düzlemler üzerine izdüşümleri*

i) $y = \frac{k_0}{2}x^2$ *(xy−düzlem ≅ tn−düzlem): teğet düzlem*

ii) $z = \frac{k_0\tau_0}{6}x^3$ *(xz−düzlem ≅ tb−düzlem): rektifyen düzlem*

iii) $z^2 = \frac{2}{9}\frac{\tau_0^2}{k_0}y^3$ *(yz−düzlem ≅ nb−düzlem): normal düzlemdir.*

İspat. i) $\lim \frac{y}{x^2} = \lim \frac{y'}{2xx'} = \lim \frac{y''}{2x'^2} = \frac{k_0}{2}$

ii) $\lim \frac{z}{x^3} = \lim \frac{z'}{3x^2x'} = ... = \lim \frac{z'''}{6(x')^3} = -\frac{k_0\tau_0}{6}$

iii) i ve ii den

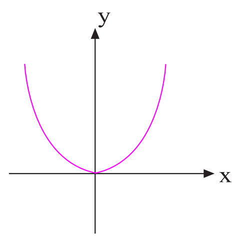
$$\frac{y}{x^2} = \frac{k_0}{2}, \quad \frac{z}{x^3} = -\frac{k_0\tau_0}{6}$$

ve buradan;

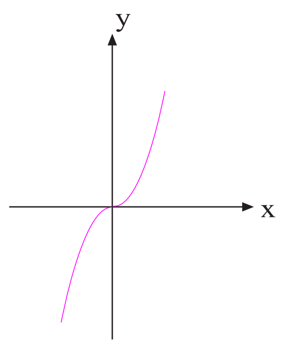
$$\frac{z^2}{y^3} = \frac{(-\frac{k_0\tau_0}{6}x^3)^2}{(\frac{k_0x^2}{2})^3} \Rightarrow \frac{z^2}{y^3} = \frac{2}{9}\frac{\tau_0^2}{k_0} \Rightarrow z^2 = \frac{2}{9}\frac{\tau_0^2}{k_0}y^3$$

elde edilir.

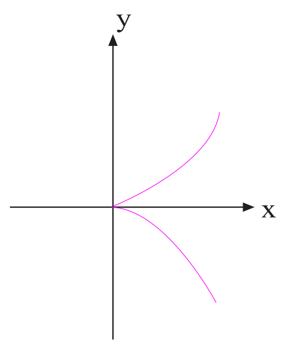
∎



Şekil 1.15: $y = \frac{k_0}{2}x^2$ Oskülatör düzlem



Şekil 1.16: $z = \frac{k_0\tau}{6}x^3$ Rektifyen düzlem



Şekil 1.17: $z^2 = \frac{2}{9}\frac{\tau_0}{k_0}y^3$ Normal düzlem

Eğrinin Frenet yaklaşımı (kanonik temsili) noktadan noktaya farklılık gösterir. Mesela $s = 0$ yerine $s = s_0$ alınırsa Taylor açılında 0 yerine s_0 gelir yani onksiyon MacLaurin serisine açılmış olacaktır. Verilecek örnek buna uygundur.

Örnek 1.3.16

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

eğrisinin $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ *noktasındaki* ($t = \frac{\pi}{2}$ *için) kanonik temsili olan eğriyi bulunuz.*

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$s = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2} t, \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}} s$$

Eğrinin yay parametresine göre ifadesi

$$\alpha(s) = (\cos \frac{1}{\sqrt{2}} s, \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s, \frac{1}{\sqrt{2}} s)$$

$$\alpha'(s) = (-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s, \frac{1}{\sqrt{2}}) = T$$

$$\alpha''(s) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s, 0) = kN$$

ve

$$k = \|\alpha''(s)\| = \frac{1}{2}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} B &= T \times N \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ -\sin \frac{1}{\sqrt{2}} s & \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s & 1 \\ -\cos \frac{1}{\sqrt{2}} s & -\sin \frac{1}{\sqrt{2}} s & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \frac{1}{\sqrt{2}} s, -\cos \frac{1}{\sqrt{2}} s, 1) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$B' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s, 0)$$

$$\left\|B'\right\| = |\tau| = \frac{1}{2}$$

olur.

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \widetilde{\alpha}(s)$$

ve

$$\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0) + [(s-s_0)^2 - k_{s_0}^2\frac{(s-s_0)}{3!}]\overrightarrow{t_{s_0}} + [\frac{(s-s_0)^2}{2!}k_{s_0} - \frac{(s-s_0)^3}{3!}k'_{s_0}]\overrightarrow{n_{s_0}} - \frac{k_{s_0}\tau_{s_0}}{6}(s-s_0)^3\overrightarrow{b_{s_0}}$$

$$\widetilde{\alpha}(s) = (0,1,\frac{\pi}{2}) + [(s-\frac{\pi}{2})^2 - \frac{1}{4}\frac{(s-\frac{\pi}{2})}{6}]\overrightarrow{t_{s_0}} + [\frac{(s-\frac{\pi}{2})^2}{2}\frac{1}{2} - 0]\overrightarrow{n_{s_0}} - \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{6}(s-\frac{\pi}{2})^3\overrightarrow{b_{s_0}}$$

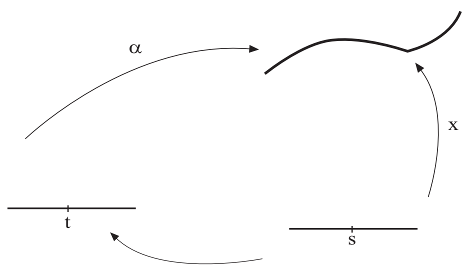
1.3.8 Keyfi (Değişken) Hızlı Eğriler İçin Frenet Formülleri (Elemanları)

Şimdiye kadar, birim hızlı eğriler için çalışmalar yaptık. Bu kesimde, regüler ve keyfi hızlı eğriler için Frenet formüllerinin aldığı biçimi araştıracağız.

(Not: Eğri regüler iken yay parametresi ile parametrelendirilip işlemlere böyle devam edilebileceği unutulmamalıdır.)

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \to \alpha(t)$$

keyfi hızlı bir eğri ve bunu temsil eden C eğrisinin yay uzunluğu cinsinden ifadesi $C : x(s)$ olsun.



Şekil 1.18: $C : x(s)$

$C : x(s)$ eğrisinin Frenet takımı $\{k, \tau, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}\}$ olarak hesaplanabilir. α için Frenet takımı $\{\gamma, \Gamma, T, N, B\}$ ile gösterilirse, bu takım

$$\begin{aligned} K &= k(s) = k(s(t)) \\ \Gamma &= \tau(s) = \tau(s(t)) \\ T &= t(s) = t(s(t)) \\ N &= n(s) = n(s(t)) \\ B &= b(s) = b(s(t)), \quad s = s(t) \end{aligned}$$

şeklinde bir yaklaşımla hesaplanabilir.

k ve γ farklı fonksiyonlardır. Farklı aralıklar üstünde tanımlıdırlar. α ve C nin ortak parçaları üzerinde eğriliği aynı tanımlarlar. Yani, $\alpha(t) = x(s(t))$ nin aynı noktasında $\gamma(t) = k(s(t))$ aynı olmalıdırlar.

k ve γ için söylenenler τ ve Γ için de geçerlidir.

Başka bir ifadeyle Frenet takımı parametre seçiminden bağımsızdır, ancak hesaplanışları farklıdırlar.

Lemma 1.3.17 *$\alpha = \alpha(t)$ bir regüler eğri, $k > 0$ ve $\upsilon = \|\alpha'(t)\|$ olsun. $\{T, N, B\}$ eğriye ait Frenet vektörlerini göstermek üzere;*

$$\begin{aligned} T' &= K\upsilon N \\ N' &= -K\upsilon T + \Gamma\upsilon B \\ B' &= -K\upsilon N \end{aligned}$$

dir.

İspat. α eğrisi yay uzunluğu parametresiyle verilmiş olsaydı

$$K(t) = k(s(t)),\ \Gamma(t) = \tau(s(t))$$

$$T = t(s),\ N = n(s),\ B = b(s) \qquad (\#)$$

yazılabilir. (#) eşitliklerinden türev alınırsa;

$$T' = t'(s)\frac{ds}{dt} = kn\frac{ds}{dt} = k(s(t))n\frac{ds}{dt}$$

ve $\frac{ds}{dt} = \upsilon$ değeri yerine yazılırsa

$$T' = K\upsilon N$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} N' &= n'\frac{ds}{dt} = (-kt + \tau b)\frac{ds}{dt} \\ &= (-k(s(t))t + \tau(s(t))b)\frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

$$N' = -K\upsilon T + \Gamma \upsilon B$$

ve işlemler yapılırsa,

$$B' = -K\upsilon N$$

elde edilir. ■

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

eğrisinin hızı için iki durum vardır.

1) Hız her noktada sabittir,

2) Hız noktaya göre değişir.

Her noktada hız sabit ise, $\|\alpha'(t)\| = c$, eğri çok basitçe yay parametresi cinsinden ifade edilebilir. $\|\alpha'(t)\| = 1$ olunca, $\{k,\ \tau,\ \overrightarrow{t},\ \overrightarrow{n},\ \overrightarrow{b}\}$ nasıl hesaplanabileceğini önceki bölümde gördük.

Eğer $\|\alpha'(t)\| = \nu(t)$ ise, $\nu(t) \neq sabit$ ise, iki şey yapılabilir.

$$s = \int \nu(t)dt$$

den s hesaplanır ve $\alpha(s)$ yazılır. Ancak bu her zaman pratik bir yol değildir ve/veya gerekmez de. O zaman, eğriyi yay- parametresi cinsinden ifade etmeden Frenet elemanları için formül geliştirmeliyiz.

$$\alpha(t), \quad \alpha : I \to \mathbb{R}^3$$

verilsin. Teğet birim vektör tanımı gereğince,

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$

dür.

Normal, dolayısıyla birim normal T ye dik olan ve $S_p\{\alpha', \alpha''\}$ düzleminde olan vektördür. Ancak, birim hızlı eğride olduğu gibi, $\frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$ nün birim normal vektör olmasını bekleyemeyiz. $\alpha' \times \alpha''$ vektörü $S_p\{\alpha', \alpha''\}$ düzlemine dik olduğundan, birim binormal vektör olarak

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

vektörü alınabilir. N, α', α'' cinsinden açık hesabı yapılarak,

$$\begin{aligned} N &= B \times T \\ &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \times \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ &= \frac{1}{\|\alpha'\| \, \|\alpha' \times \alpha''\|} (\left\langle \alpha', \alpha' \right\rangle \alpha'' - \left\langle \alpha', \alpha'' \right\rangle \alpha') \\ &= \frac{1}{\|\alpha'\| \, \|\alpha' \times \alpha''\|} (\left\|\alpha'\right\|^2 \alpha'' - \left\langle \alpha', \alpha'' \right\rangle \alpha') \end{aligned}$$

elde edilir.

$$N \in S_p\{\alpha', \alpha''\}$$

dür. Böylece bir kısmının ispatı yapılmış olan aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 1.3.18

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$$

keyfi hızlı bir eğri olmak üzere, eğrinin Frenet elemanları şöyledir:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$

$$N = B \times T$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

$$K = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$\Gamma = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

Örnek 1.3.19

$$\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6})$$

eğrisi için Frenet elemanlarını bulunuz.

Çözüm 1.3.20 $\alpha(t)$ *nin türevleri*

$$\alpha'(t) = (1, t, \frac{t^2}{2})$$

$$\alpha''(t) = (0, 1, t)$$

$$\alpha'''(t) = (0, 0, 1)$$

şeklindedir.

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1 + t^2 + \frac{t^4}{4}$$

Buradan,

$$\upsilon = \|\alpha'(t)\| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = \frac{1}{2}(t^2 + 2)$$

elde edilir.

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (\frac{t^2}{2}, -t, 1)$$

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \sqrt{(\frac{t^4}{4} + t^2 + 1)} = \frac{1}{2}(t^2 + 2)$$

$$\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle = 1$$

Bu hesaplamaları kullanarak T, N, B, K, Γ *aşağıdaki şekilde bulunur:*

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{(1, t, \frac{t^2}{2})}{\frac{1}{2}(t^2 + 2)} = \frac{(2, 2t, t^2)}{t^2 + 2}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} = \frac{(\frac{t^2}{2}, -t, 1)}{\frac{1}{2}(t^2 + 2)} = \frac{(t^2, -2t, 2)}{t^2 + 2}$$

$$K = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\frac{1}{2}(t^2 + 2)}{(\frac{1}{2}(t^2 + 2))^3} = 4(t^2 + 2)^{-2}$$

$$\Gamma = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{1}{(\frac{1}{2}(t^2 + 2))^2} = 4(t^2 + 2)^{-2}$$

$$N = B \times T = \frac{(t^2, -2t, 2)}{t^2 + 2} \times \frac{(2, 2t, t^2)}{t^2 + 2} = \frac{1}{(t^4 + 2t^2 + 4)}(-2t^3 - 4t, 4 - t^4, 2t^3 + 4t)$$

1.3.9 GENEL ÖRNEKLER

Örnek 1.3.21 $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ *eğrisini yay parametresi ile parametrelendiriniz.*

Çözüm 1.3.22

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-a\sin t, a\cos t, b)\\ \left\|\alpha'(t)\right\| &= \sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}t$$

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad s = s(t)$$

$\alpha_*(s(t)) = \alpha_*(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}})$ *ve aynı notasyonları kullanılarak*

$$\alpha(s) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

birim hızlı eğri elde edilir.

Örnek 1.3.23 *Bütün noktaları aynı düzlem içinde kalan eğriye düzlem eğri denir. Bir* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *eğrisinin düzlemsel olması için gerek ve yeter şart* $\tau = 0$ *olmasıdır. Gösteriniz.*

Çözüm 1.3.24 $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *eğrisine ait Frenet elemanları* $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b}$, k, τ *olsun.*

$$\tau = 0 \Rightarrow \overrightarrow{b'} = \tau\overrightarrow{n} \text{ den } \overrightarrow{b'} = 0, \ \forall s$$

elde edilir. $\overrightarrow{b'} = 0$ *ise eğrinin bütün noktaları* $b = sbt$ *normalli düzlemdedir. Bu düzlem* $\overrightarrow{t}$ *ve* $\overrightarrow{n}$ *nin gerdiği düzlemdir.*

Tersine, eğri bir düzlem eğri olsun. $\mathbb{R}^3$ *ün* $\overrightarrow{p}$ *ve* $\overrightarrow{q}$ *gibi iki vektörünü*

$$\left\langle \overrightarrow{\alpha(s)} - \overrightarrow{p}, \overrightarrow{q} \right\rangle = 0$$

olacak şekilde seçelim. $\overrightarrow{q}$ *ilgili düzlemin normalidir.*

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{\alpha(s)} - \overrightarrow{p}, \overrightarrow{q} \right\rangle &= 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left\langle \overrightarrow{\alpha'(s)}, \overrightarrow{q} \right\rangle = 0\\ \left\langle \overrightarrow{\alpha''(s)}, \overrightarrow{q} \right\rangle = 0\end{array}\right\}\\ &\Rightarrow (\overrightarrow{q} \perp \overrightarrow{t} \text{ ve } \overrightarrow{q} \perp \overrightarrow{n})\\ &\Rightarrow \overrightarrow{q} \parallel \overrightarrow{b}\end{aligned}$$

ve $\overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{q}}{\|\overrightarrow{q}\|}$ *için*

$$\overrightarrow{b'} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{b'} = \tau \overrightarrow{n}$$

den

$$\tau = 0$$

elde edilir.

Bu problemde ayrıca şu gösterilmiş oldu. Eğri düzlemsel eğri ise, eğrinin içinde kaldığı düzlem teğet ve normalin gerdiği düzlemdir.

Örnek 1.3.25 (a, b) *merkezli* r *yarıçaplı çemberin oskülatör (eğrilik) çemberi kendisidir, gösteriniz.*

Çözüm 1.3.26

$$\alpha(t) = (a + r\cos t, b + r\sin t)$$

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-r\sin t,\ r\cos t) \\ \|\alpha'(t)\| &= r \end{aligned}$$

Eğri birim hızlı değildir. Önce yay parametresi cinsinden yazalım.

$$s = \int_0^t r dt = rt$$

olduğundan

$$t = \frac{s}{r}$$

yazılır.

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (a + r\cos\frac{s}{r}, b + r\sin\frac{s}{r}) \\ \alpha'(s) &= (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}) \\ \|\alpha'(t)\| &= 1 \Rightarrow \overrightarrow{t}(s) = \alpha'(s) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{t'}(s) = \alpha''(s) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r})$$

$$\|\alpha''(s)\| = \frac{1}{r}$$

$$\overrightarrow{n} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = (-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r})$$

$$\frac{1}{R} = \left\| \overrightarrow{t'}(s) \right\| = \frac{1}{r} \Rightarrow R = r$$
$$k = \frac{1}{R} \text{ den } k = \frac{1}{r} \text{ (eğrilik)}$$

Oskülatör (eğrilik) çemberinin yarıçapı $R = r$ dir. Oskülatör (eğrilik) çemberinin merkezi M olsun.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{O\alpha} + R\overrightarrow{n} \\ &= (a + r\cos\frac{s}{r}, b + r\sin\frac{s}{r}) + R(-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r}) \\ &= (a + r\cos\frac{s}{r}, b + r\sin\frac{s}{r}) + r(-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r}) \\ &= (a, b) \end{aligned}$$

$$M = (a, b)$$

Eğrilik çemberi, merkezi (a, b), yarıçapı $R = r$ olan çemberdir. Yani, eğrilik çemberi verilen eğrinin kendisidir.

Örnek 1.3.27 *$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $s \to \alpha(s)$ eğrisinin üç ardışık türevi*

a-) $\alpha'(s)$, $\alpha''(s)$, $\alpha'''(s)$ ($\alpha''(s) \neq 0$) olsun. Eğrinin burulması $\tau(s)$ ise,

$$\tau(s) = -\frac{(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle}$$

dir. Gösteriniz.

b-) Bir eğrinin burulması yön seçiminden bağımsızdır. Gösteriniz.

Çözüm 1.3.28 *a-)*

$$\overrightarrow{b'} = -\tau\overrightarrow{n} \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{b'}, \overrightarrow{n} \right\rangle = -\langle \tau\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \rangle = -\tau \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \rangle = -\tau$$

$$\overrightarrow{b'} = (\overrightarrow{t} \times \overrightarrow{n})' = (\overrightarrow{t'} \times \overrightarrow{n} + \overrightarrow{t} \times \overrightarrow{n'})$$

olduğundan

$$\tau = -\left\langle \overrightarrow{b'}, \overrightarrow{n} \right\rangle = \left\langle (\overrightarrow{t'} \times \overrightarrow{n} + \overrightarrow{t} \times \overrightarrow{n'}), \overrightarrow{n} \right\rangle = (\overrightarrow{t'}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{t}) + (\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n'}, \overrightarrow{n}) = -(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n'}, \overrightarrow{n})$$

$$\overrightarrow{t} = \alpha'$$
$$\overrightarrow{n} = \frac{\alpha''}{k}$$
$$\overrightarrow{n'} = (\frac{\alpha''}{k})' = \frac{\alpha'''k - k'\alpha''}{k^2}$$

$$\begin{aligned}\tau &= -(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n'}, \overrightarrow{n}) = (\alpha', \frac{\alpha'''k - k'\alpha''}{k^2}, \frac{\alpha'''}{k}) \\ &= -(\alpha', \frac{\alpha'''}{k}, \frac{\alpha''}{k}) + (\alpha', \frac{k'\alpha''}{k^2}, \frac{\alpha''}{k}) \\ &= -\frac{(\alpha', \alpha''', \alpha'')}{k^2}\end{aligned}$$

$$\tau(s) = \frac{(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle}$$

b-) Eğer $\alpha(s)$ yerine $\alpha(-s)$ alınsaydı,

$$\frac{d\alpha(-s)}{ds} = \frac{d\alpha(-s)}{d(-s)}\frac{d(-s)}{ds} = \frac{d\alpha(t)}{dt}(-1) = -\alpha'(t) = -\alpha'(-s), \quad -\alpha'(s) \text{ ile aynı.}$$

Böylece,

$$\alpha'(-s) = -\alpha'(s),\ \alpha''(-s) = \alpha''(s),\ \alpha'''(-s) = -\alpha'''(s)$$

olup, a-) da elde edilen eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\tau(-s) = \frac{(-\alpha'(s), \alpha''(s), -\alpha'''(s))}{\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle} = \tau(s)$$

elde edilir.

Örnek 1.3.29

$$\alpha(u) = (a\cos u, a\sin u, bu), \quad (a, b \in \mathbb{R} \text{ sabitler})$$

eğrisinin herhangi bir noktasındaki teğet doğrusunun denklemini yazınız.

Çözüm 1.3.30 *Doğrultman vektörü:*

$$\alpha'(u) = (-a\sin u, a\cos u, b)$$

Nokta:

$$\alpha(u) = (a\cos u, a\sin u, bu)$$

Temsilci nokta:

$$X = (x, y, z)$$

olmak üzere, teğet doğrusunun denklemi

$$d: \quad \frac{x - a\cos u}{-a\sin u} = \frac{y - a\sin u}{a\cos u} = \frac{z - bu}{b}$$

şeklindedir. $\sin u$ *ve* $\cos u$ *nun sıfır olabileceği noktaları göz önüne alarak doğrunun standart yazılışı yerine,*

$$\begin{aligned} x &= -\lambda a \sin u + a \cos u \\ y &= \lambda a \cos u + a \sin u \\ z &= \lambda b + bu \end{aligned}$$

şekli daha uygundur.

Örnek 1.3.31

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(0) = (1, 0, -3) \\ \alpha'(t) = (t, e^t, t^2) \end{array}\right\}$$

olmak üzere belli olan α *eğrisinin denklemini yazınız.*

Çözüm 1.3.32 *Problemin çözümü aslında bir diferansiyel denklem çözümüdür. Buna göre, ilgili denklem*

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= t, \quad \alpha_1(0) = 1, \\ \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= e^t, \quad \alpha_2(0) = 0, \\ \frac{d\alpha_3(t)}{dt} &= t^2, \quad \alpha_3(0) = -3, \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \frac{t^2}{2} + c_1, \quad \alpha_1(0) = 1, \\ \alpha_2(t) &= e^t + c_2, \quad \alpha_2(0) = 0, \\ \alpha_3(t) &= \frac{t^3}{3} + c_3, \quad \alpha_3(0) = -3, \end{aligned}$$

olup $\alpha(t)$ *eğrisi,*

$$\alpha(t) = (\frac{t^2}{2} + 1, e^t, \frac{t^3}{3} - 3)$$

parametrik ifadesiyle belli olur.

Örnek 1.3.33

$$\alpha(s) = (a \cos s, a \sin s, bs), \quad a^2 + b^2 = 1$$

eğrisinin,

a) Oskülatör düzlemlerinin denklemini,
b) Oskülatör (eğrilik) çemberlerini,
c) a) ve b) şıklarını $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $s = \frac{\pi}{2}$ *için örnekleyiniz.*

Çözüm 1.3.34 *a) Bir uzay eğrisinin oskülatör düzlemlerinin denklemi*

$$\det[\overrightarrow{X-\alpha(s)}, \overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)] = 0$$

olarak bellidir. $X = (x, y, z)$ *düzlemin temsilci noktası olmak üzere*

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (-a\sin s, a\cos s, b) \\ \|\alpha'(s)\| &= 1 \Rightarrow \overrightarrow{t}(s) = \overrightarrow{\alpha'(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= (-a\cos s, -a\sin s, 0) \\ \|\alpha''(s)\| &= a \\ \overrightarrow{n}(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = (-\cos s, -\sin s, 0) \end{aligned}$$

$$\det\begin{bmatrix} x-a\cos s & y-a\sin s & z-bs \\ -a\sin s & a\cos s & b \\ -\cos s & -\sin s & 0 \end{bmatrix} = 0$$

den

$$b\sin sx - b\cos sy + (z-bs)a = 0$$

elde edilir.

b) Oskülatör Çemberi = *Oskülatör Küre* $\cap$ *Oskülatör Düzlem*

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\alpha(s)} + R\overrightarrow{n}(s)$$

$$k = \|\alpha''(s)\| = a, \quad R = \frac{1}{k} = \frac{1}{a}$$

$$\overrightarrow{OM} = (a\cos s, a\sin s, bs) + \frac{1}{a}(-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$\overrightarrow{OM} = (a\cos s - \frac{1}{a}\cos s,\ a\sin s - \frac{1}{a}\sin s, bs)$$

$$B_R(M) = (x-(a\cos s - \frac{1}{a}\cos s))^2 + (y-(a\sin s - \frac{1}{a}\sin s))^2 + (z-bs)^2 = \frac{1}{a^2}.$$

Böylece, oskülatör çember

$$B_R(M) = (x-(a\cos s - \frac{1}{a}\cos s))^2 + (y-(a\sin s - \frac{1}{a}\sin s))^2 + (z-bs)^2 = \frac{1}{a^2}$$

küresi ve

$$b\sin sx - b\cos sy + (z-bs)a = 0$$

düzleminin arakesiti olan çemberdir.

c) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $s = \frac{\pi}{2}$ için oskülatör çember

$$\begin{aligned} M &= (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}\pi}{4}), \\ R &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$B_{\sqrt{2}}(M) = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{\sqrt{3}\pi}{2}z + (\frac{1}{2} - \sqrt{2} + \frac{3\pi^2}{16}) = 0$$

küresi ve

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z - \frac{\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{2}} = 0$$

düzleminin arakesiti olarak bulunur.

Alıştırma 1.3.35 *1) $\alpha(t) = (3\cos 2t, 3\sin 2t)$ eğrisini yay uzunluğu parametresiyle ifade ediniz.*

2) $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, 5)$ eğrisini yay uzunluğu parametresiyle ifade ediniz.

3) $\alpha(t) = (t, t^2)$ eğrisinin $t = 0, 1, -1$ değerleri için hızlarını karşılaştırınız.

4) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ eğrisinin $t = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ değerleri için hızlarını karşılaştırınız.

5) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, bt)$, ($b =$ adım) eğrisinin $t = 0$, π, $-\pi$ değerleri için hızlarını karşılaştırınız.

6) $\alpha(t) = (t, 2t, e^t)$ eğrisinin $t = 0$ noktasındaki hız vektörünü doğrultman vektör kabul eden doğrunun denklemni yazınız.

7) $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 2 - \sin t, \frac{3}{5}\sin t)$ eğrisinin $t = 0$ noktasındaki Frenet elemanlarını, teğet, normal ve rektifyen düzlem denklemlerini yazınız.