Bölüm 1

I. DERS

1.1 AFİN UZAY-ÖKLİD UZAY

Tanım 1.1.1 *A boş olmayan bir cümle, V, $n-$boyutlu bir vektör uzayı olsun. Bir*

$$f : A \times A \to V$$

dönüşümü verildiğinde,

A1. $\forall$ $P, Q, R \in A$ için;

$$f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$$

dir.

A2. $\forall$ $P \in A$ ve $\forall$ $\overrightarrow{\alpha} \in V$ için bir tek $Q \in A$;

$$f(P,Q) = \overrightarrow{\alpha}$$

olacak şekilde vardır.

şartları sağlanıyor ise, (A, V, f) sistemine bir afin uzay (A ya V ile birleşen afin uzay) denir.

Kabul: Afin uzayının boyutu birleştiği vektör uzayın boyutu olarak kabul edilir.

1.2 ÖKLİD UZAYI

Tanım 1.2.1 *A afin uzayının birleştiği V vektör uzayı bir iç-çarpımlı vektör uzayı ise A ya (V iç-çarpımlı vektör uzayı ile birleşen) Öklid uzayı denir.*

Örnek 1.2.2 *$A = \mathbb{R}^n$, $V = ((\mathbb{R}^n, \oplus), (\mathbb{R}, +, .), \odot)$ olsun. f yi*

$$\begin{aligned} f &: A \times A \to V \\ (P,Q) &\to f(P,Q) = \overrightarrow{PQ} = Q - P \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. f, A1 ve A2 aksiyomlarını sağlar. Şöyle ki;

A1. $\forall\ P, Q, R \in A$ için;

$$f(P,Q) + f(Q,R) = Q - P + R - Q = R - P = f(P,R)$$

A2. $\forall\ P \in A$ ve $\forall\ \overrightarrow{\alpha} \in V$ için

$$f(P,Q) = \overrightarrow{\alpha} \Rightarrow Q - P = \overrightarrow{\alpha} \Rightarrow Q - P = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

$$\begin{aligned} (q_1 - p_1, q_2 - p_2, ..., q_n - p_n) &= (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \\ q_i - p_i &= \alpha_i, 1 \leq i \leq n, \\ q_i &= \alpha_i + p_i \end{aligned}$$

olacak şekilde vardır.

Böylece, $A = \mathbb{R}^n$ nokta cümlesi $V = \mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleşen $n-$boyutlu afin uzaydır. Ayrıca $\mathbb{R}^n$, $V = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ uzayı ile birleşen $n-$boyutlu Öklid uzayıdır.

1.2.1 Nokta-Vektör Eşlemesi

V, $n-$boyutlu vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. A da bir tek P_0 noktası tesbit edilir ve sabit tutulursa, A2 gereğince, her $P \in A$ noktasına $\overrightarrow{P_0P}$ vektörü karşılık gelir.

Böylece, V deki, bir $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ baz sistemini, A da tesbit edilen nokta P_0 ve $\forall i$ için, $\overrightarrow{P_0P_i} = \alpha_i$ eşlemesiyle elde edilen nokta P_i olmak üzere,

$$\{P_0, P_1, ..., P_n\}$$

nokta cümlesiyle eşlemek mümkündür. Bu şekilde elde edilen $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ nokta $(n+1)-$lisine A da bir afin çatı denir.

A bir Öklid uzayı ise, $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ çatısına Öklid çatısı denir. $A = \mathbb{R}^n$, $V = (\mathbb{R}^n, <, >)$ olmak üzere, A, V ile birleşen bir Öklid uzayı olduğunu gösterdik. Eğer $\mathbb{R}^n$ de $<, >_E = \sum x_i y_i$ Öklid iç çarpımı alınırsa,

$$(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n, +), (\mathbb{R}^n, +, .), \odot, <, >_E, A_1, A_2)$$

Öklid uzayı standard Öklid uzayı olarak isimlendirilir ve bazen E^n ile gösterilir.

Bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörünün normu $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ dir. $\mathbb{R}^n$ in standard bazı $\{e_i\}$, $i = 1, ..., n$, $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_{in})$, E^n in bu bazla birleşen Öklid çatısı başlangıç noktası $E_0 = (0, ..., 0) = 0$ olan ve $E_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_{in})$, $\{E_i\}$ noktalarıyla oluşan nokta $(n+1)-$lisidir.

Örnek 1.2.3

$$\begin{aligned} E_0 &= (0,0,0), \\ E_1 &= (1,0,0), \\ E_2 &= (0,1,0), \\ E_3 &= (0,0,1) \end{aligned}$$

olarak belirli,

$$\{E_0, E_1, E_2, E_3\} \subset \mathbb{R}^3 (= A)$$

nokta cümlesinin $\mathbb{R}^3_A$ da bir afin (ve hatta Öklid) çatı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\mathbb{R}^3_A$ *,* $\mathbb{R}^3_V$ *ile birleşen 3-boyutlu bir Öklid uzayıdır.*

$\left\{\overrightarrow{E_0E_1} = \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{E_0E_2} = \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{E_0E_3} = \overrightarrow{e_3}\right\}$ *sistemi* $\mathbb{R}^3_V$ *de bir ortonormal bazdır.:*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_1\rangle &= \langle (1,0,0), (1,0,0)\rangle = 1 \\ \langle e_2, e_2\rangle &= \langle (0,1,0), (0,1,0)\rangle = 1 \\ \langle e_3, e_3\rangle &= \langle (0,0,1), (0,0,1)\rangle = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2\rangle &= \langle (1,0,0), (0,1,0)\rangle = 0 \\ \langle e_2, e_3\rangle &= \langle (0,1,0), (0,0,1)\rangle = 0 \\ \langle e_1, e_3\rangle &= \langle (1,0,0), (0,0,1)\rangle = 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ *vektörleri lineer bağımsızdır ve* $\mathbb{R}^3$ *ü gererler.*

Örnek 1.2.4 $\mathbb{R}^2_N$, $(\mathbb{R}^2_V, \langle,\rangle)$ *verilsin.*

$$\begin{aligned} P_0 &= (1,1) \\ P_1 &= (4,1) \\ P_2 &= (3,4) \end{aligned}$$

$\{P_0, P_1, P_2\} \subset \mathbb{R}^2_N$ *bir afin çatı mıdır?*

$\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$ *vektörlerinin lineer bağımsız ve* $\mathbb{R}^2$ *yi gerip germediğini incelememiz gerekmektedir.*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha_1} &= \overrightarrow{P_0P_1} = (3,0) \\ \overrightarrow{\alpha_2} &= \overrightarrow{P_0P_2} = (2,3) \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} c_1\overrightarrow{\alpha_1} + c_2\overrightarrow{\alpha_2} &= 0 \Rightarrow c_1(3,0) + c_2(2,3) = (0,0) \\ &\Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \\ &\Rightarrow \overrightarrow{\alpha_1},\ \overrightarrow{\alpha_2} \text{ lineer bağımsız} \end{aligned}$$

ii) $\{\overrightarrow{\alpha_1},\ \overrightarrow{\alpha_2}\}$, $\mathbb{R}^2_N$ *yi gerer.* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_N$ *için*

$$\begin{aligned} (x,y) &= c_1\overrightarrow{\alpha_1} + c_2\overrightarrow{\alpha_2} \\ &= c_1(3,0) + c_2(2,3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 3c_1 + 2c_2 \\ y &= 3c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{y}{3} \Rightarrow c_1 = -\frac{2}{9}y + \frac{x}{3} \end{aligned}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_N$, $\overrightarrow{\alpha_1}$ *ve* $\overrightarrow{\alpha_2}$ ***bileşenleri*** *cinsinden yazılabilir.*

Alıştırma 1.2.5 $\alpha_1 = (0,0,2), \alpha_2 = (1,1,0), \alpha_3 = (2,-1,4)$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \subset \mathbb{R}^3$ *cümlesinin* $\mathbb{R}^3$ *de bir baz oluşturduğunu ve karşı gelen* $\mathbb{R}^3 = A$ *uzayındaki afin çatıyı bulunuz.*

$\mathbb{R}^n$ de bir $P \in \mathbb{R}^n$ noktası için, sabit tutulan nokta $P_0 = 0$ olmak üzere, eşlenen vektör $\overrightarrow{OP}$ vektörüdür. $\overrightarrow{OP}$ vektörüne bazen P nin yer vektörü adı verilir. Nokta vektör eşlemesi kullanılarak P nin bileşenleri ve koordinat fonksiyon kavramı verilebilir. Bir $P \in \mathbb{R}^n = A$ için, $\mathbb{R}^n$ deki bir baz, $\alpha_1 = OP_1, \alpha_2 = OP_2, ..., \alpha_n = OP_n$ ise;

$$\overrightarrow{OP} = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

yazılabilir. $a_i, 1 \leq i \leq n$ reel sayılarına, P nin OP_i bazına veya $\{O, P_1, ..., P_n\}$ çatısına bağlı afin (Öklid yapıyla ele alınırsa Öklid) koordinatları adı verilir.

$$x_i : \mathbb{R}^n_A \to \mathbb{R}$$

$$P \to x_i(P) = a_i, \quad \overrightarrow{OP} = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n$$

olarak tanımlı x_i fonksiyonuna $\mathbb{R}^n_A$ nın i-yinci koordinat fonksiyonu ve $(x_1, ..., x_n)$ fonksiyon n-lisine de $\mathbb{R}^n_A$ nın bazına göre koordinat sistemi denir. Eğer E^n ve $\{e_i\}$ bazı alınırsa, elde edilecek olan koordinat sistemi Öklid koordinat sistemi vaya dik koordinat sistemi olarak adlandırılır.